



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií



Harmonický průběh napětí a proudu v obvodu

Ing. Martin Černík, Ph.D.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

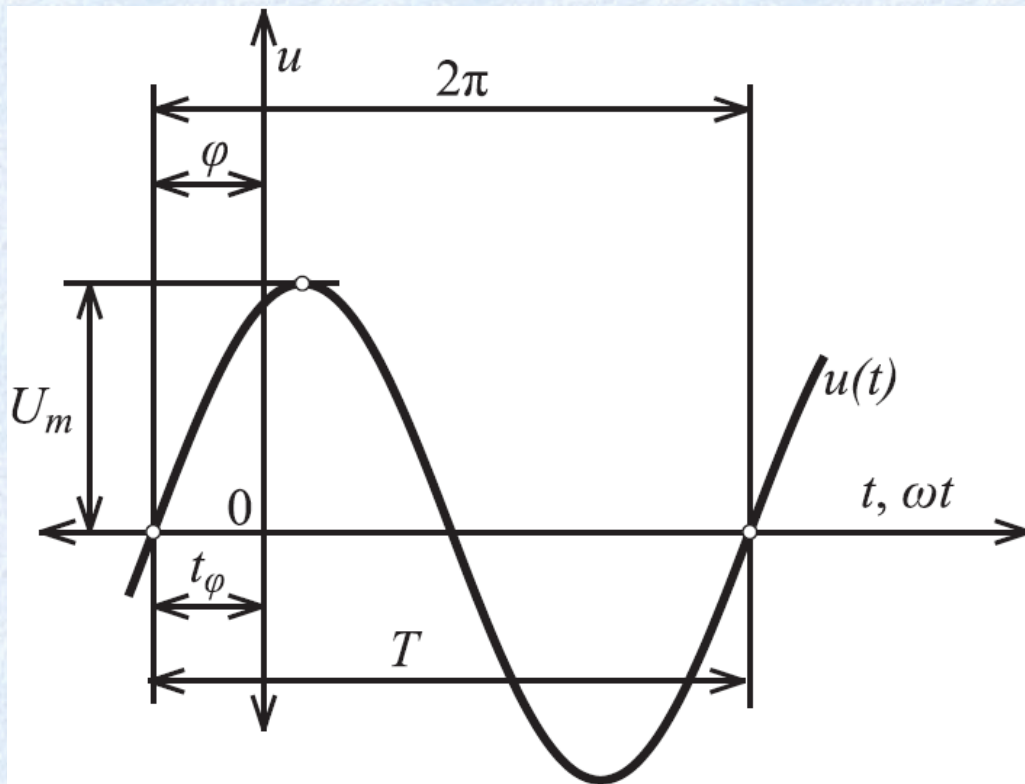


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických předmětů.

harmonický průběh napětí



$u(t)$ – okamžitá hodnota,
funkční hodnota podle času

U_m – maximální hodnota
(amplituda)

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – úhlová
frekvence [rad/s]

$(\omega t + \varphi)$ – fáze (fázový úhel)

φ – počáteční fáze

t_φ – časový posun fáze

$$t_\varphi = -\frac{\varphi}{\omega}$$

vzestupná hrana sinusovky:

$$t < 0: \quad \varphi > 0$$

$$t > 0: \quad \varphi < 0$$

$$u(t) = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- **Harmonický průběh – náhradní veličiny**

- maximální hodnota

- odpovídá hodnotě U_m

- střední hodnota

- výpočet podle vzorce

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |U_m \sin(\omega t)| dt = \frac{2U_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} U_m$$

- efektivní hodnota

- výpočet podle vzorce

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_m \sin(\omega t)]^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m$$

- ss složka rovna 0

- **Harmonický průběh – poměrné veličiny**

- činitel výkyvu –

$$k_v = \frac{U_m}{U} = \frac{U_m}{\frac{U_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

- činitel tvaru –

$$k_t = \frac{U}{U_{av}} = \frac{U_m/\sqrt{2}}{\frac{2U_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

- činitel plnění –

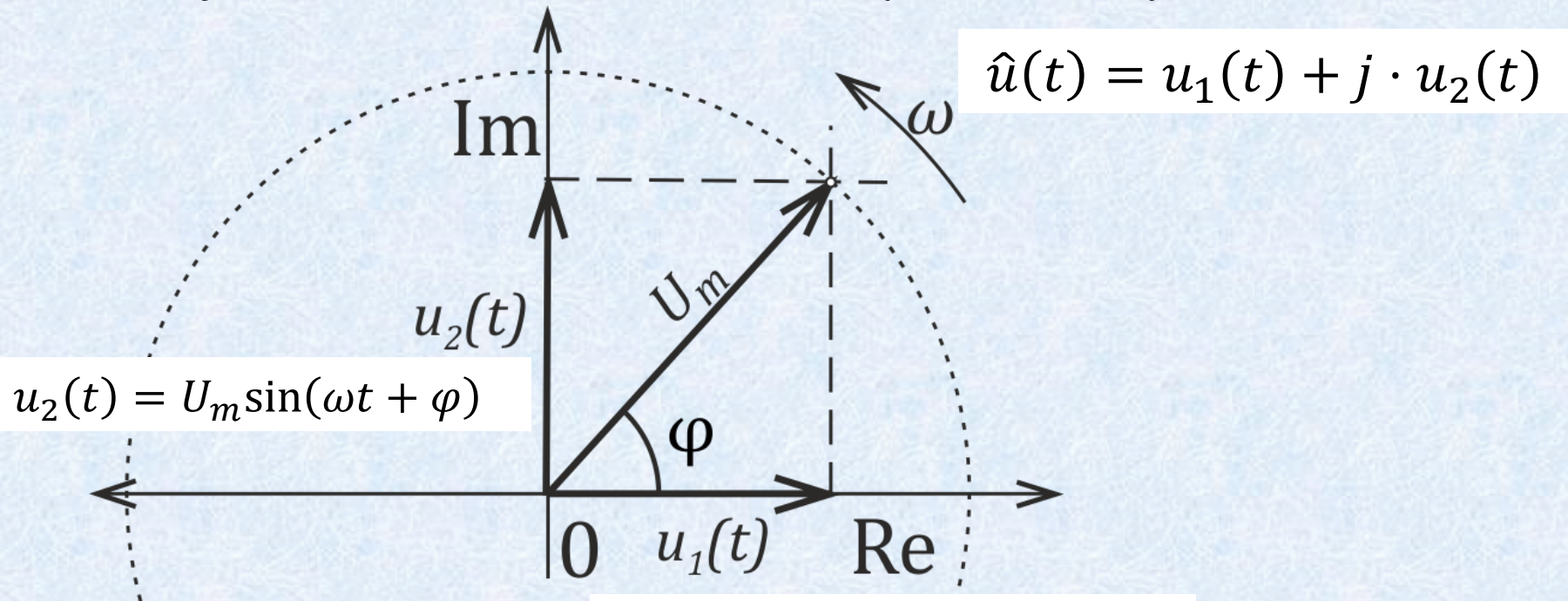
$$k_p = \frac{U_{av}}{U_m} = \frac{2U_m/\pi}{U_m} = 2/\pi$$

Symbolicko komplexní metoda

- pro lineární obvody
- harmonický průběh napájení
- stejná frekvence obvodových veličin
- aplikace komplexních čísel

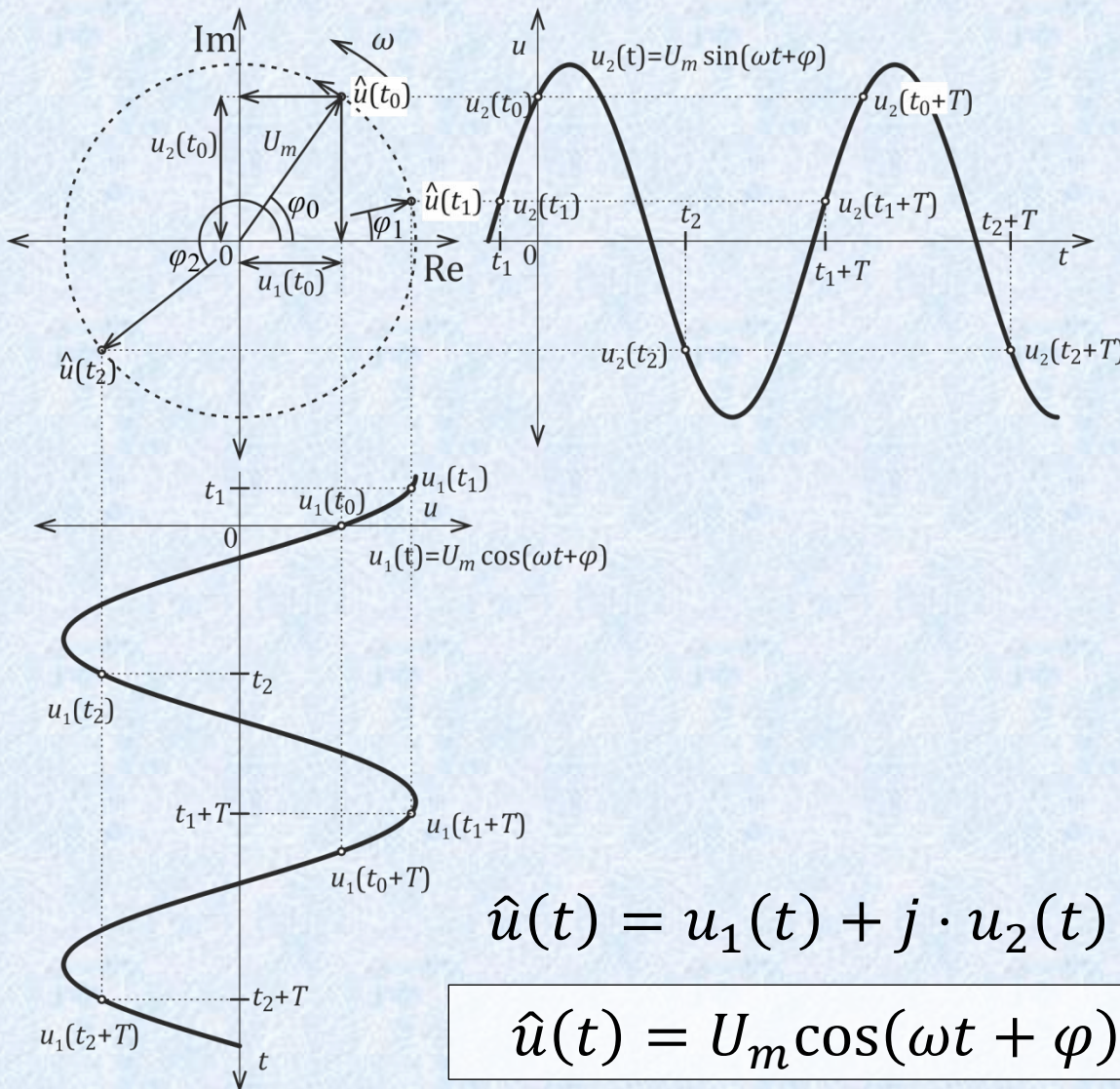
- **Rotující fázor - definice**

- harmonický průběh se zaznamenává jako průmět do rotace jednotkového vektoru do komplexní roviny



- rotující fázor je ekvivalentní k časovému průběhu
- základní převod: $u(t) = \text{Im}[\hat{u}(t)]$

- **Rotující fázor**
 - časový průběh reálné a imaginární složky
 - vztah záznamu pro harmonický průběh a rotující fázor
 - využití periodicity harmonického průběhu



$$\hat{u}(t) = u_1(t) + j \cdot u_2(t)$$

$$\hat{u}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- **Fázor napětí - definice**

- po dosazení $\hat{u}(t) = U_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$

- aplik. Eulerova vzt. $e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$

- se získá rotující fázor v exponenciálním tvaru

$$\hat{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

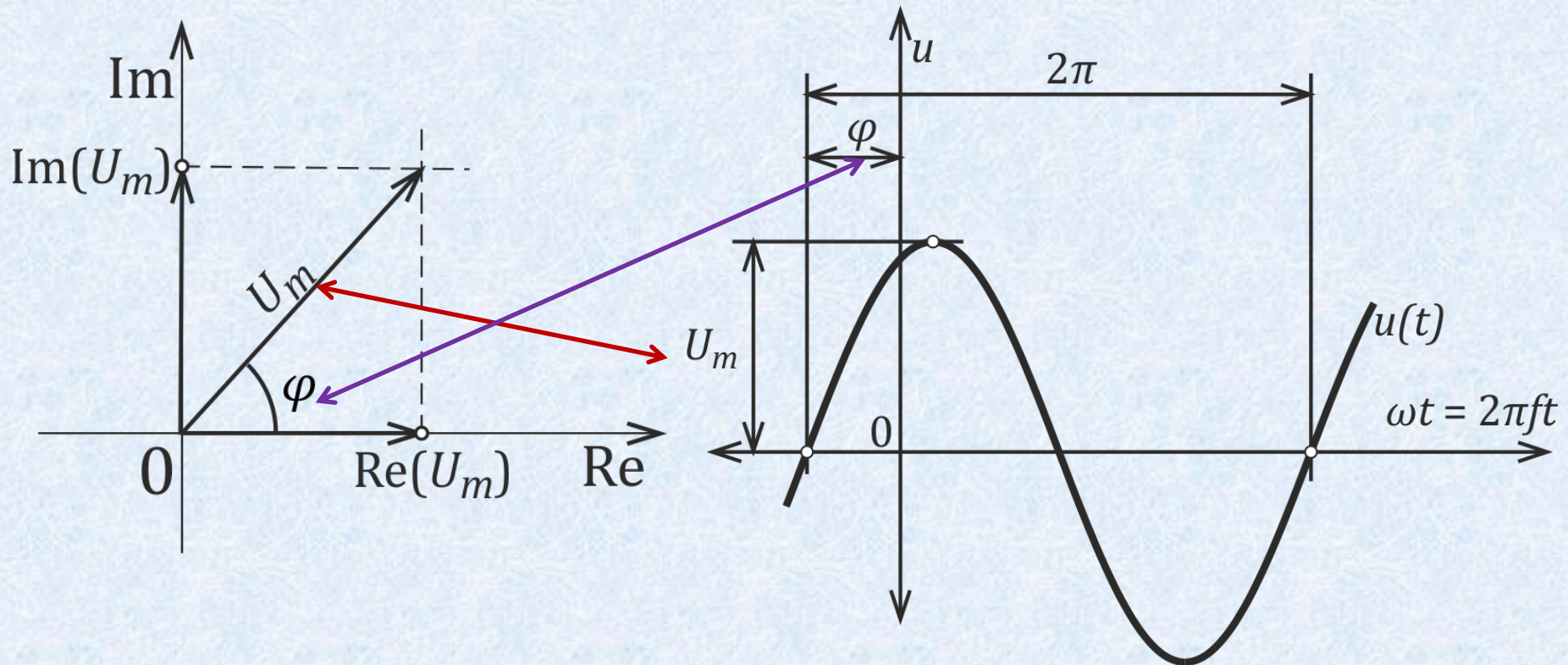
- při stejné frekvenci v celém obvodu, zavedení kvazistacionárního stavu - pro $t = 0$ tedy: $e^{j\omega t} = 1$

$$U_m e^{j\varphi} = \hat{U}_m - \textbf{fázor napětí maximální hodnoty}$$

$$\hat{U} = U e^{j\varphi} = U_m / \sqrt{2} e^{j\varphi} - \textbf{fázor napětí efektivní hodnoty}$$

- hodnota na voltmetru je rovna modulu fázoru napětí efektivní hodnoty: $U = |\hat{U}|$

- **Fázor napětí $\leftrightarrow$ časový průběh napětí**
– srovnání



- **harmonické napětí na rezistoru**

- časový průběh proudu

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- rotující fázor proudu

$$\hat{i}(t) = \frac{\hat{u}(t)}{R} = \frac{U_m}{R} e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

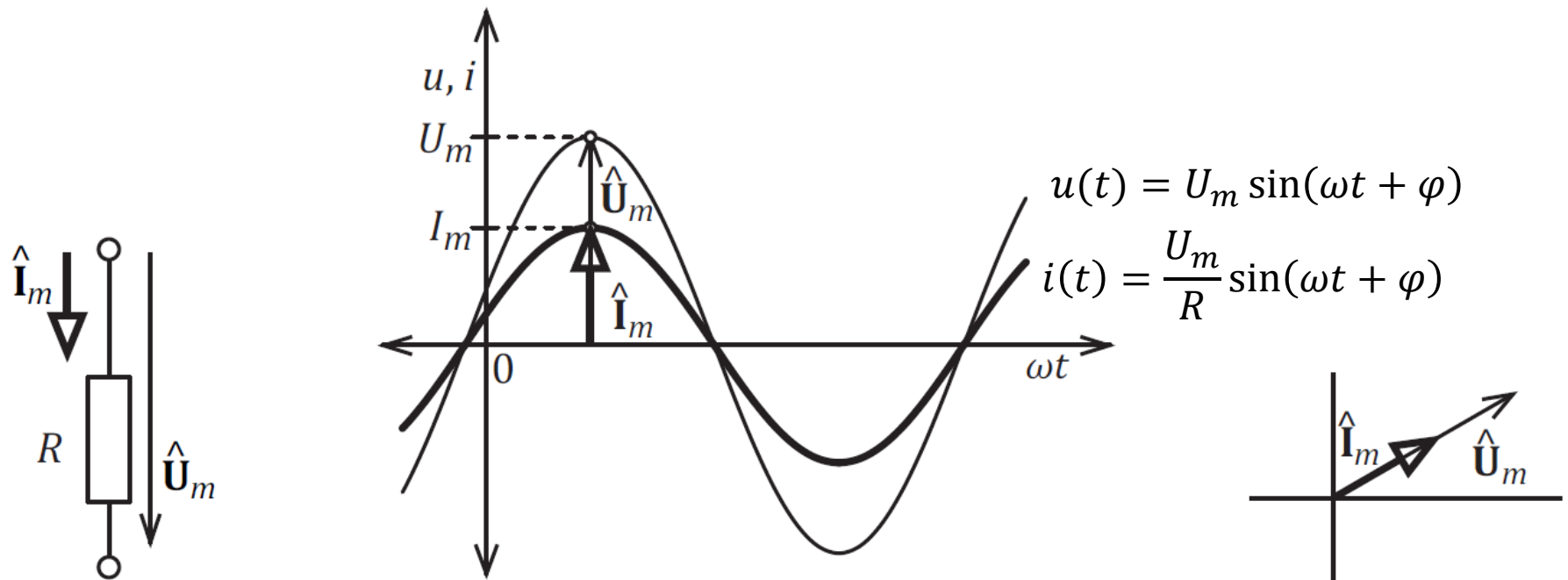
- převod na fázor v max. hodnotách

$$\frac{U_m}{R} e^{j\omega t} e^{\varphi} = I_m e^{j\omega t} e^{\varphi}$$

po vykrácení:

$$\frac{\hat{U}_m}{R} = \hat{I}_m$$

- **harmonické napětí na rezistoru**
 - časový průběh a fázorový diagram



- **harmonické napětí na kapacitoru**

- časový průběh proudu

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d[U_m \sin(\omega t + \varphi)]}{dt} = \omega C \cdot U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

pro: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$: $u(t) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi)$

- rotující fázor proudu: $I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

$$\hat{i}(t) = C \frac{d\hat{u}(t)}{dt} = C \frac{d(U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega C \hat{U}_m e^{j\omega t}$$

- fázor v max. hodnotách:

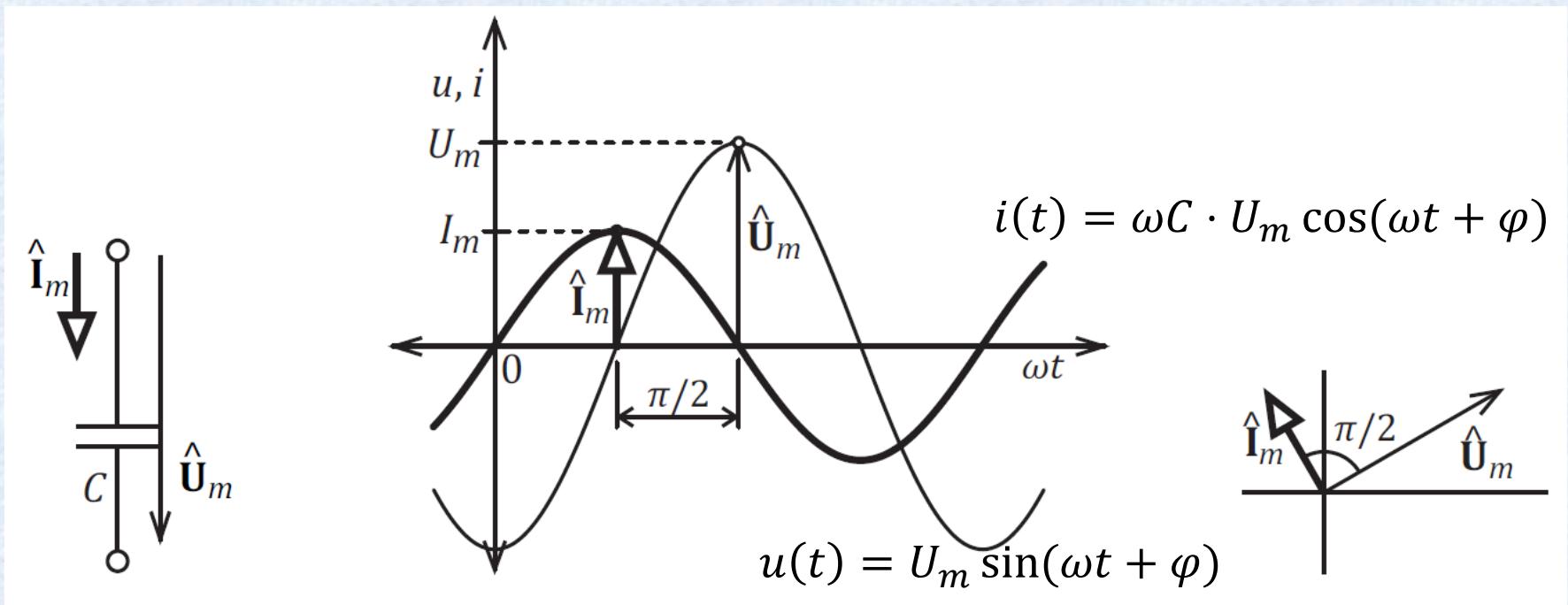
$$I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega C \cdot U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

po vykrácení:

$$\hat{I}_m = j\omega C \hat{U}_m$$

$$\hat{U}_m = \frac{\hat{I}_m}{j\omega C}$$

- harmonické napětí na kapacitoru
časový průběh a fázorový diagram



- **harmonické napětí na induktoru**

- napětí na induktoru

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d[I_m \sin(\omega t + \varphi)]}{dt} = \omega L \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

pro: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$: $i(t) = -\frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t + \varphi)$

- rotující fázor napětí

$$\hat{u}(t) = L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = L \frac{d(I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega L \hat{I}_m e^{j\omega t}$$

- fázor napětí v maximálních hodnotách

$$U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega L \cdot I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

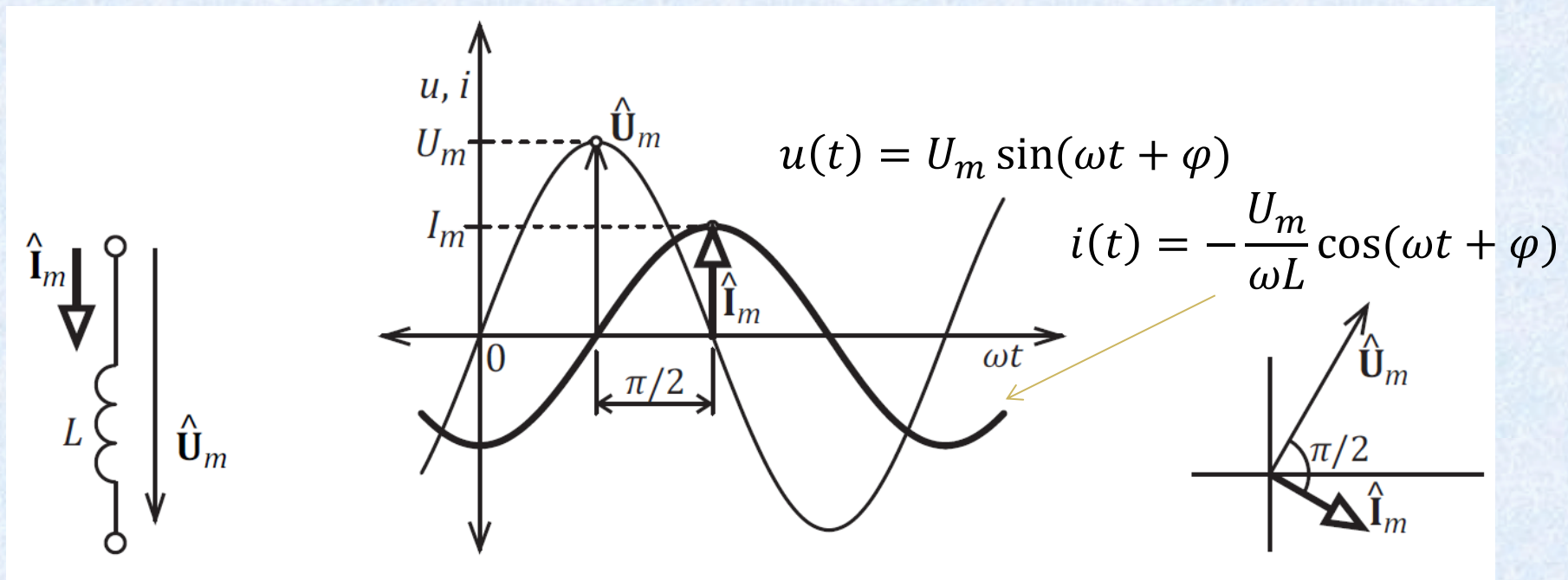
po vykrácení:

$$\hat{U}_m = j\omega L \hat{I}_m$$

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{U}_m}{j\omega L}$$

- induktor

- časový průběh a fázorový diagram



- **Imittance**

- popis parametrů pasivních lineárních prvků v obvodu v harmonickém ustáleném stavu
- napětí a proud popsán fázory
- Impedance a admitance

- **Impedance**

- **definice** - analogie odporu pro ss obvody, podíl fázoru napětí a fázoru proudu, jednotka 1 Ohm

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_m}{\hat{\mathbf{I}}_m} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{I}}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$$

- modul impedance – reálné číslo

- podíl modulů fázoru napětí a proudu

$$|\mathbf{Z}| = Z = \frac{|\hat{\mathbf{U}}|}{|\hat{\mathbf{I}}|} = \frac{U}{I}$$

- impedance ve složkovém tvaru
- $\mathbf{Z} = R + jX$ kde R : resistance, X : reaktance

- **Impedance základních prvků**

- rezistor

$$Z = \frac{\hat{U}_m}{\hat{I}_m} = \frac{\hat{U}_m}{\frac{\hat{U}_m}{R}} = R, \quad X_R = 0$$

- kapacitor : $\hat{I}_m = j\omega C \cdot \hat{U}_m$

$$Z = \frac{\hat{U}_m}{\hat{I}_m} = \frac{\hat{U}_m}{j\omega C \cdot \hat{U}_m} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

- induktor: $j\omega L \cdot \hat{I}_m = \hat{U}_m$

$$Z = \frac{\hat{U}_m}{\hat{I}_m} = \frac{j\omega L \cdot \hat{I}_m}{\hat{I}_m} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad X_L = \omega L$$

- **Admittance Y**

- definice,

$$Y = \frac{\hat{I}_m}{\hat{U}_m} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_I - \varphi_U)}$$

- analogie vodivosti pro ss. obvody, podíl fázorů proudu a napětí, jednotka 1 Siemens
- modul admittance

$$|Y| = Y = \frac{|\hat{I}|}{|\hat{U}|} = \frac{I}{U}$$

- admittance ve složkovém tvaru $Y = G + jB$
- G : konduktance, B : susceptance

- **Admittance základních prvků**

- rezistor

$$Y = \frac{\hat{I}_m}{\hat{U}_m} = \frac{\frac{\hat{U}_m}{R}}{\hat{U}_m} = \frac{1}{R} = G, B_R = 0$$

- kapacitor : $\hat{I}_m = j\omega C \cdot \hat{U}_m$

$$Y = \frac{\hat{I}_m}{\hat{U}_m} = \frac{j\omega C \cdot \hat{U}_m}{\hat{U}_m} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}, B_C = \omega C$$

- induktor: $j\omega L \cdot \hat{I}_m = \hat{U}_m$

$$Y = \frac{\hat{I}_m}{\hat{U}_m} = \frac{\hat{I}_m}{j\omega L \cdot \hat{I}_m} = -\frac{j}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}, B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

I. Kirchhoffův zákon:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = i_5 + i_6$$

– zápis harmonického proudu pomocí rotujícího fázoru:

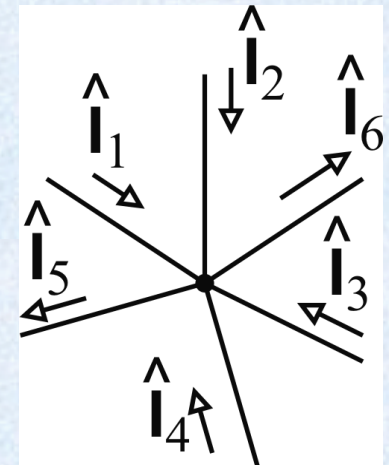
$$\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_4 = \hat{i}_5 + \hat{i}_6, \text{ pro } \hat{i} = \hat{I}_m e^{j\omega t} \text{ platí}$$

$$\hat{I}_{m1} e^{j\omega t} + \hat{I}_{m2} e^{j\omega t} + \hat{I}_{m3} e^{j\omega t} + \hat{I}_{m4} e^{j\omega t} = \hat{I}_{m5} e^{j\omega t} + \hat{I}_{m6} e^{j\omega t}$$

– po vykrácení rotující složky a převodu na fázor v efektivních hodnotách:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 = \hat{I}_5 + \hat{I}_6$$

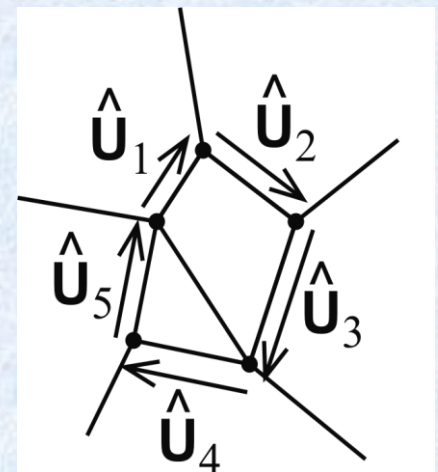
– neplatí pro modul fázoru proudu,
(hodnota měřená ampérmetrem nejde aplikovat při aplikaci pro sestavení obvodových rovnic)



II. Kirchhoffův zákon

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

- zápis okamžitého napětí rotujícího fázoru
 - $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4 + \hat{u}_5 = 0$, pro $\hat{u} = \hat{U}_m e^{j\omega t}$ platí
 - $\hat{U}_{m1} e^{j\omega t} + \hat{U}_{m2} e^{j\omega t} + \hat{U}_{m3} e^{j\omega t} + \hat{U}_{m4} e^{j\omega t} + \hat{U}_{m5} e^{j\omega t} = 0$
 - po vykrácení rotující složky a převodu do fázoru v efektivních hodnotách
- $$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 + \hat{U}_4 + \hat{U}_5 = 0$$
- neplatí pro modul fázoru napětí
(hodnota naměřená voltmetrem nejde aplikovat pro sestavení obvodových rovnic)



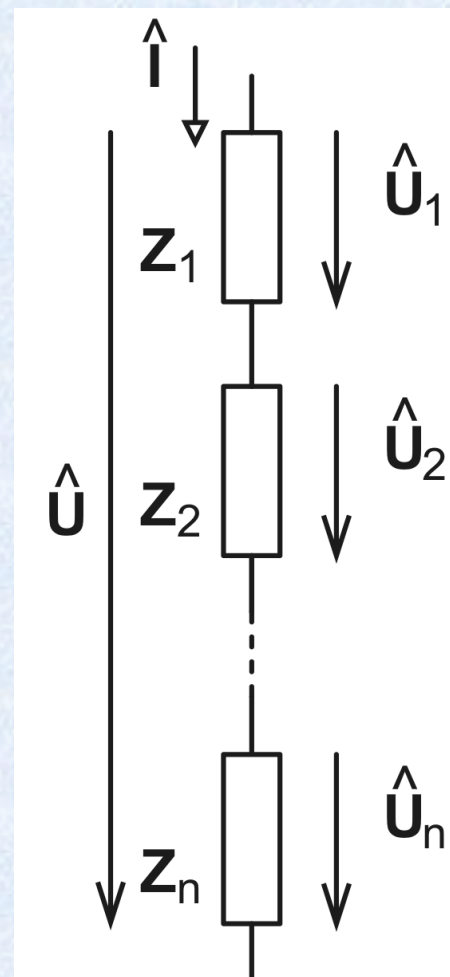
- **sériové řazení imitancí**
 - impedance v sérii se sčítají

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \dots + \hat{U}_n$$

$$\mathbf{Z} \cdot \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_1 \cdot \hat{\mathbf{I}} + \mathbf{Z}_2 \cdot \hat{\mathbf{I}} + \dots + \mathbf{Z}_n \cdot \hat{\mathbf{I}}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_n$$

$$1/\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Y}_1 + 1/\mathbf{Y}_2 + \dots + 1/\mathbf{Y}_n$$



- **paralelní řazení imitancí**

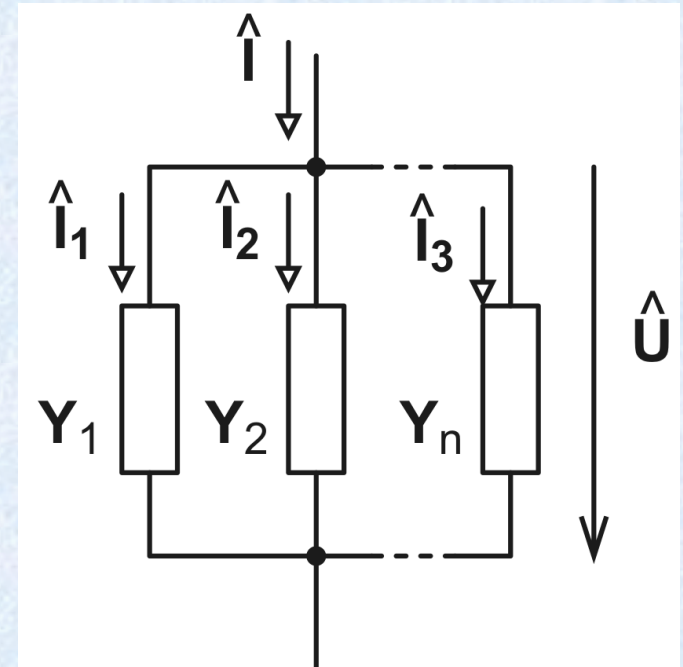
- paralelně řazené admitance se sčítají

$$\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2 + \dots + \hat{\mathbf{I}}_n$$

$$\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{Y}_1 \cdot \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{Y}_2 \cdot \hat{\mathbf{U}} + \dots + \mathbf{Y}_n \cdot \hat{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_n$$

$$1/\mathbf{Z} = 1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + \dots + 1/\mathbf{Z}_n$$



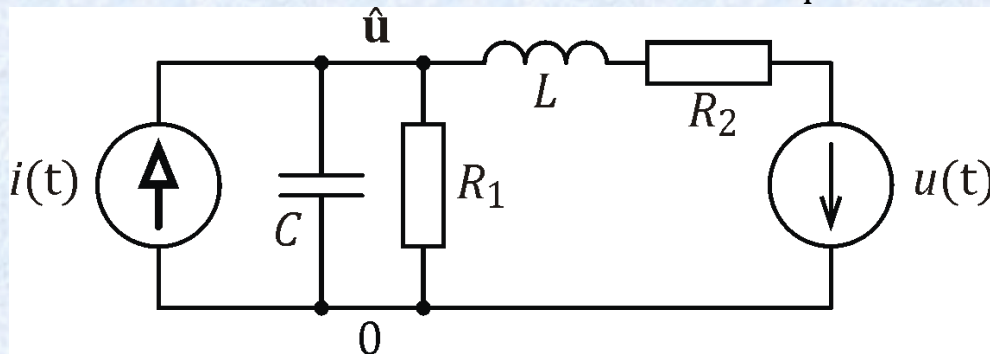
- **Výpočty v lineárních obvodech napájených harmonickými zdroji o jedné frekvenci**
 - transfigurace
 - princip superpozice
 - ekvivalentní náhrady
 - ekvivalence lineárních harmonických zdrojů
 - Theveninův a Nortonův teorém
 - běžné metody řešení obvodových rovnic

• Příklad – obvodové rovnice

- vypočtete fázor napětí $\hat{u}$

$$R_1 = 200 \, \Omega, R_2 = 10 \, \Omega, L = 200 \, \text{mH}, C = 200 \, \mu\text{F}$$

$$u(t) = 30 \sin(314,2t), i(t) = 1 \sin(314,2t + \frac{\pi}{4})$$



- Řešení - podle věty o uzlových napětích:

- převod veličin zdrojů na fázory (v efektivních hodnotách), prvky jako impedance: $\hat{\mathbf{I}}_0 = 0,5 + j0,5 \, \text{A}$, $\hat{\mathbf{U}}_0 = \frac{30}{\sqrt{2}} \, \text{V}$, $\mathbf{Z}_{R1} = 200 \, \Omega$, $\mathbf{Z}_{R2} = 10 \, \Omega$, $\mathbf{Z}_C = -j15,91 \, \Omega$, $\mathbf{Z}_L = j62,84 \, \Omega$
- sestavení rovnice: (dosazení, výpočet)

$$\hat{\mathbf{I}}_0 - \frac{\hat{u}}{\mathbf{Z}_C} - \frac{\hat{u}}{\mathbf{Z}_{R1}} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{u}}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_{R2}} = 0$$

- **Výkon při periodickém průběhu napájení**
 - okamžitý příkon (časový průběh příkonu)

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- střední výkon

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

- energie dodaná během periody

$$w_t = \int_0^T p(t) dt = P_{av} \cdot T$$

- **Okamžitý příkon prvku při harmonickém napájení**

- napětí a proud: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I)$
- okamžitý příkon: $p(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi_U) \sin(\omega t + \varphi_I)$
- zavedení rozdílu fází $\varphi_P = \varphi_U - \varphi_I$. Pro potřebu výpočtu příkonu má napětí na prvku nulovou fázi. Okamžitý příkon:
- $p(t) = U_m I_m \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi_P)$
- po úpravě a převodu na efektivní hodnoty napětí a proudu

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi_P - \cos(2\omega t + \varphi_P)] = UI [\cos \varphi_P - \cos(2\omega t + \varphi_P)]$$

- **Střední příkon prvku při harmonickém napájení**

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi_P - \cos(2\omega t + \varphi_P)] dt = \\ &= \frac{UI}{T} \left[\cos \varphi_P \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_P) dt \right] \\ &= \frac{UI}{T} [\cos \varphi_P \cdot T + 0] = UI \cos \varphi_P \end{aligned}$$

- činný výkon, jednotka W, označení P

- **Zdánlivý výkon**

- součinem efektivních hodnot napětí a proudu

$$S = U \cdot I = \frac{U_m \cdot I_m}{2}$$

- nemá fyzikální smysl
- jednotka 1 VA (voltampér), označení S
- vztah k činnému výkonu: $S \cos \varphi_P = P$

$$S = \frac{P}{\cos \varphi_P}$$

- **Účinník**

- poměr mezi činným a zdánlivým výkonem

$$\Lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi_P = PF$$

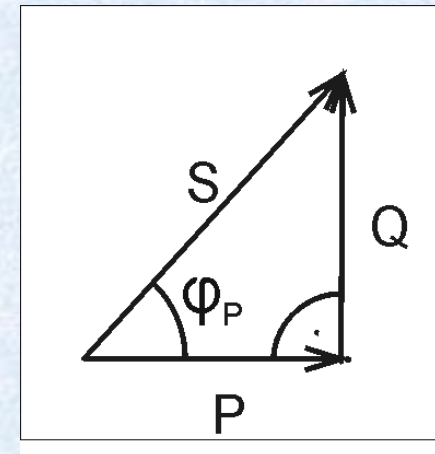
- PF - Powerfactor

• Jalový výkon

- jde o výkon, který si obvod vyměňuje se do sítí
- jeho velikost se počítá podle pravoúhlého trojúhelníka
- jednotka 1 var (voltampér reaktanční), označení Q
- pro spotřebič nabývá kladných i záporných hodnot
 - induktivní charakter zátěže - napětí před proudem - kladný
 - kapacitní charakter zátěže - proud před napětím – záporný

$$Q = U \cdot I \sin \varphi_P$$

$$S^2 = P^2 + Q^2$$



- **Komplexní výkon**

- výpočet výkonu harmonického průběhu za pomoci fázorů napětí a proudu – zavedení komplexního výkonu S
- fázor proudu se dosazuje komplexně sdružený
- (rozdíl fáze napětí a proudu při výpočtu okamžitého výkonu)

$$\begin{aligned} S &= \hat{U}\hat{I}^* = Ue^{j\varphi_U} \cdot Ie^{-j\varphi_I} = UIe^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = UIe^{j\varphi_P} \\ &= Se^{j\varphi_P} = UI \cos \varphi_P + jUI \sin \varphi_P = P + jQ \end{aligned}$$

- **z komplexního výkonu se potom určí:**

- **činný výkon**

(reálná část kompl. výk.) $P = \operatorname{Re}[\mathbf{S}]$

- **jalový výkon**

(imag. část kompl. výk.) $Q = \operatorname{Im}[\mathbf{S}]$

- **zdánlivý výkon**

(modul kompl. výk.) $S = |\mathbf{S}|$

- **účinník**

$$\Lambda = \cos \varphi_P = \frac{\operatorname{Re}[\mathbf{S}]}{|\mathbf{S}|}$$

- **Komplexní výkon z jednoho fázoru veličiny a imitancí**

- proud a impedance

$$S = \hat{U}\hat{I}^* = \mathbf{Z}\hat{I}\hat{I}^* = \mathbf{Z}I^2 = I^2(R + jX)$$

$$P = I^2 \cdot R$$

$$Q = I^2 \cdot X$$

- napětí a admittance

$$S = \hat{U}\hat{I}^* = \hat{U}(\hat{U}\mathbf{Y})^* = \mathbf{Y}^*U^2 = U^2(G + jB)$$

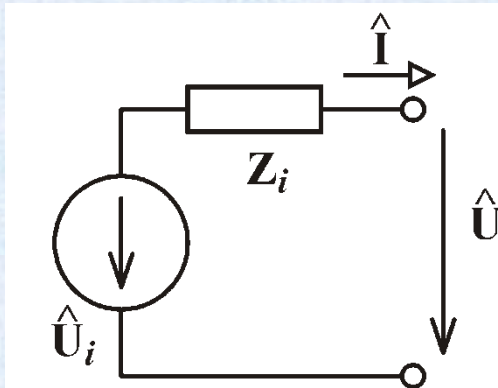
$$P = U^2 \cdot G$$

$$Q = -U^2 \cdot B$$

- výpočet činného a jalového výkonu z impedance a admittance bez použití komplexního oboru čísel

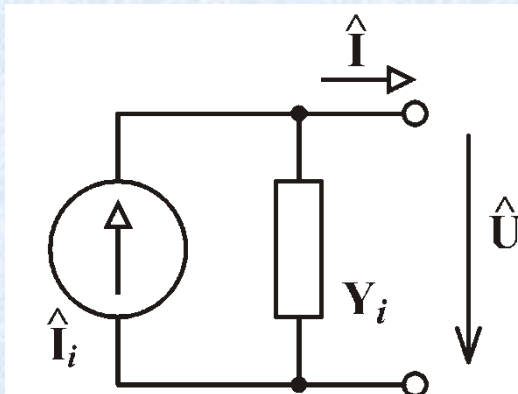
- **harmonický lineární zdroj**

- harmonický lineární zdroj napětí s vnitřní impedancí Z_i



$$\hat{U} = \hat{U}_i - Z_i \cdot \hat{I}$$

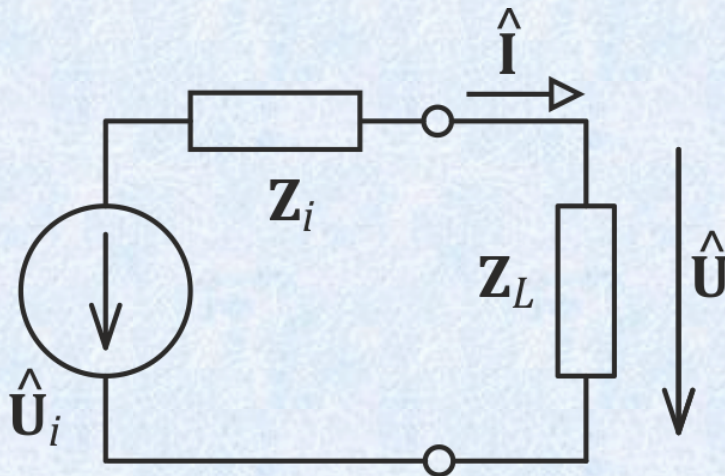
- harmonický lineární zdroj proudu s vnitřní admitancí Y_i



$$\hat{I} = \hat{I}_i - Y_i \cdot \hat{U}$$

- **Přizpůsobení harmonického lineárního zdroje napětí**

- harmonický lineární zdroj napětí $\hat{U}_i$ s vnitřní impedancí Z_i
- hledání maximálního přeneseného činného výkonu ze zdroje na zátěž o impedanci Z_L



$$Z_i = R_i + jX_i$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$

- **Přizpůsobení harmonického lineárního zdroje napětí**

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re}[\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{I}}^*] = \operatorname{Re}\left[\hat{\mathbf{U}}_i \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_i} \left(\frac{\hat{\mathbf{U}}_i}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_i}\right)^*\right] = \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{U_i^2(R_L + jX_L)}{[R_L + R_i + j(X_L + X_i)] \cdot [R_L + R_i - j(X_L + X_i)]}\right] = \\ &= \frac{U_i^2 R_s}{(R_L + R_i)^2 + (X_L + X_i)^2} \end{aligned}$$

- maximální činný výkon se dosáhne , pokud $R_L = R_i$ a $X_L + X_i = 0$, tedy $X_L = -X_i$
- **úplné přizpůsobení** $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_i^*$
- **neúplné přizpůsobení** $|\mathbf{Z}_L| = |\mathbf{Z}_i^*|$, tedy $Z_L = Z_i$
 - je připojena impedance o stejném modulu (absolutní hodnotě)

- **sériový RLC obvod –**

- impedance

$$\mathbf{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

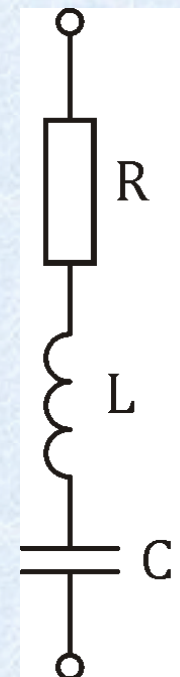
- nalezení takové frekvence ω_r , kdy imaginární složka impedance bude rovna 0:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}, \text{ potom } \mathbf{Z}_r = R$$

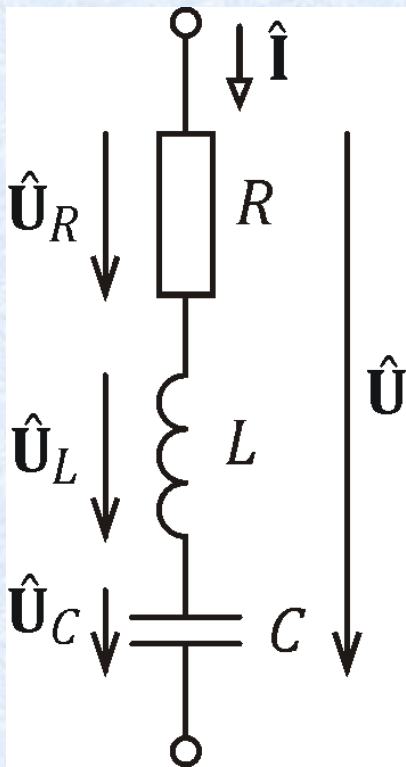
- obvod neodebírá ze zdroje jalový výkon, výměna energie mezi induktorem a kapacitorem – Rezonance
- Určení frekvence rezonance – Thompsonův vzorec

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

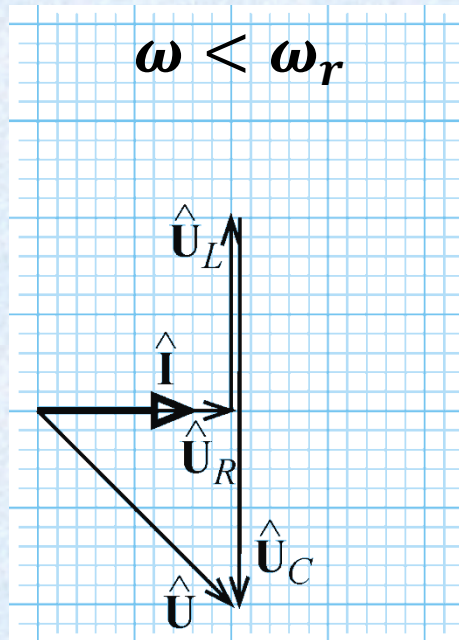
- obvod v rezonanci



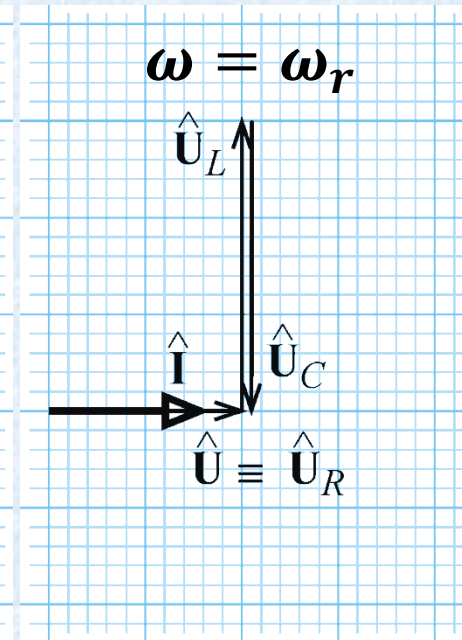
- sériový RLC obvod**
 - fázorový diagram



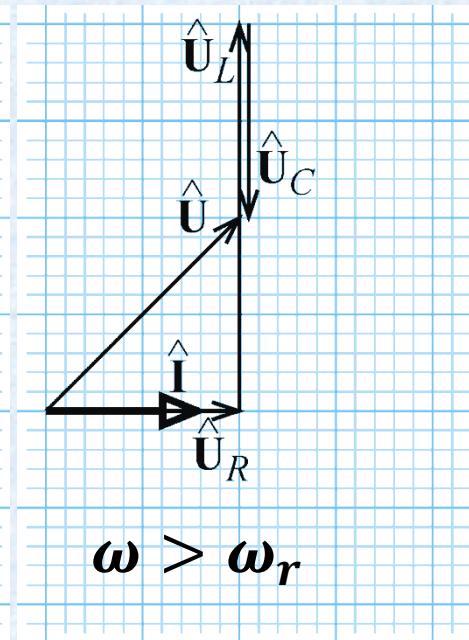
frekvence nižší než
rezonanční,
kapacitní charakter



rezonance



frekvence vyšší než
rezonanční,
induktivní charakter



- **sériový rezonanční obvod – obecný popis**

- při rezonanci modul fázoru napětí na LC maximální (napěťová rezonance)
- poměr mezi fázorem proudu ku fázoru proudu při rezonanci – hledá se šířka pásma
- vytvoření normalizované frekvenční závislosti (konstantní modul fázoru napětí na krajních svorkách)

$$\begin{aligned}\frac{\hat{U}_r}{\hat{U}} &= \frac{\mathbf{Z}_r}{\mathbf{Z}} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\left(\omega - \frac{1}{\omega LC}\right)} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\left(\omega - \frac{\omega_r^2}{\omega}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + j\frac{\omega_r L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(s - \frac{1}{s}\right)}\end{aligned}$$

- při dosazení: $\frac{1}{LC} = \omega_r^2$, $Q = \frac{\omega_r L}{R}$, $s = \frac{\omega}{\omega_r}$

- **šířka pásma rezonance**

- stanovení šířky tak, aby pro krajní frekvence pásma je hodnota veličiny veličina $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$ veličiny při rezonanci:

$$\left| \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_1} \right| = \left| \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_2} \right| = \left| \frac{1}{1 \pm j} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad Q \left(s_1 - \frac{1}{s_1} \right) = -1 \quad Q \left(s_2 - \frac{1}{s_2} \right) = 1$$

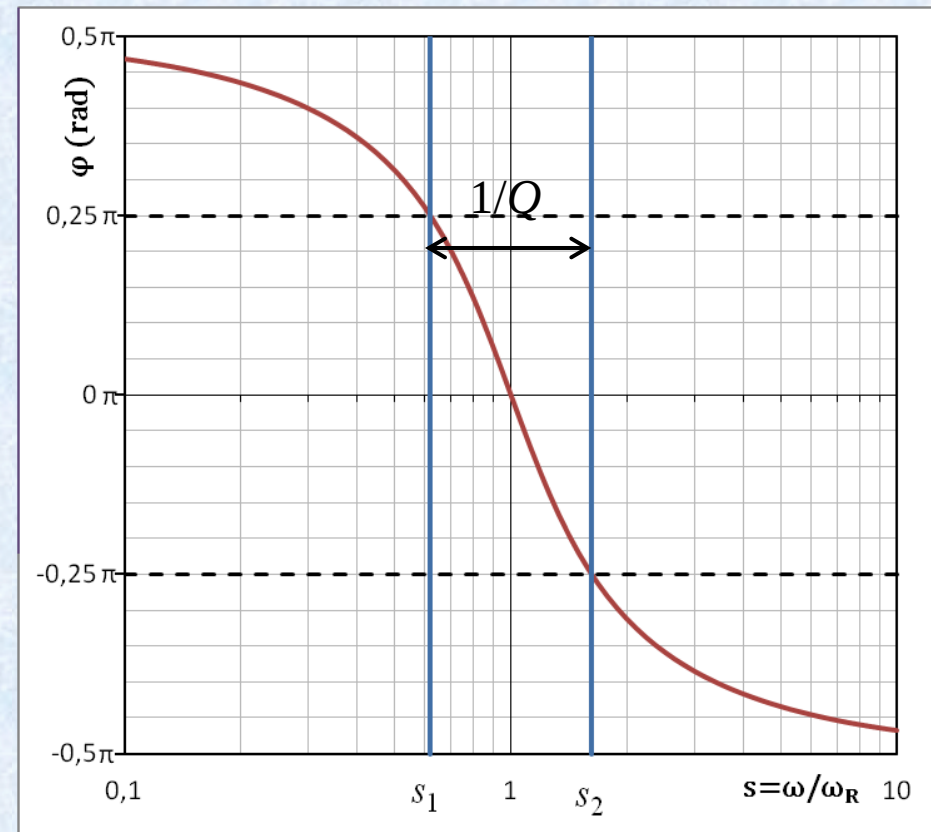
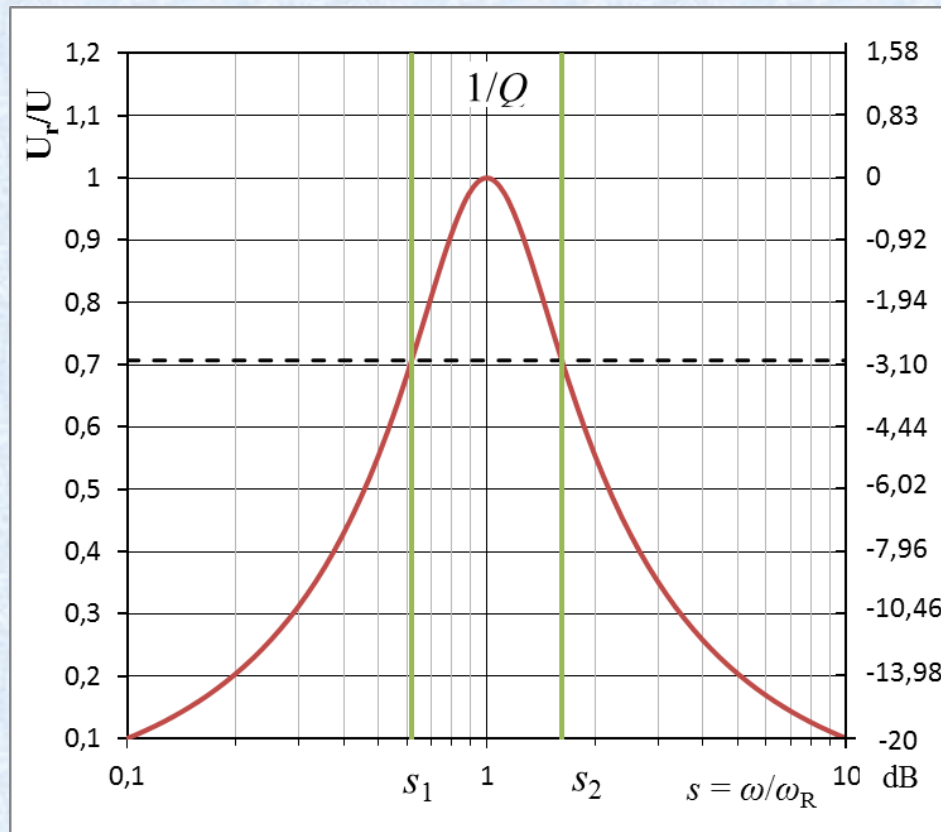
- šířka pásma závisí na jakosti rezonančního obvodu:

$$s_1 \cdot s_2 = 1 \quad s_2 - s_1 = \frac{1}{Q}$$

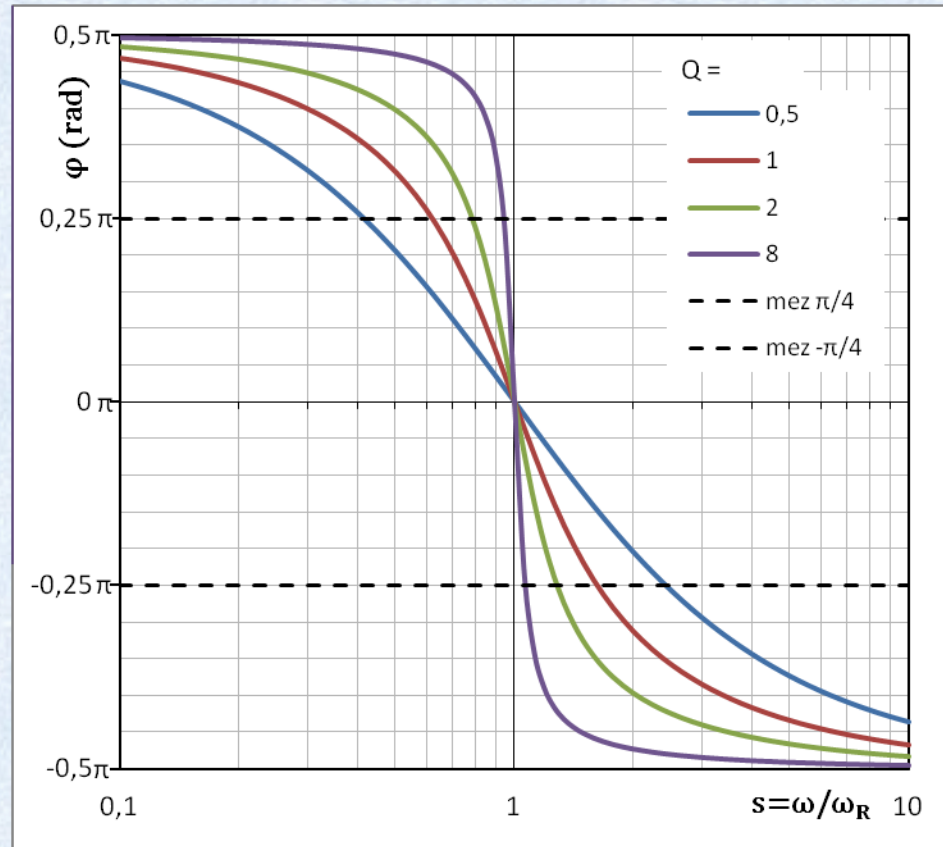
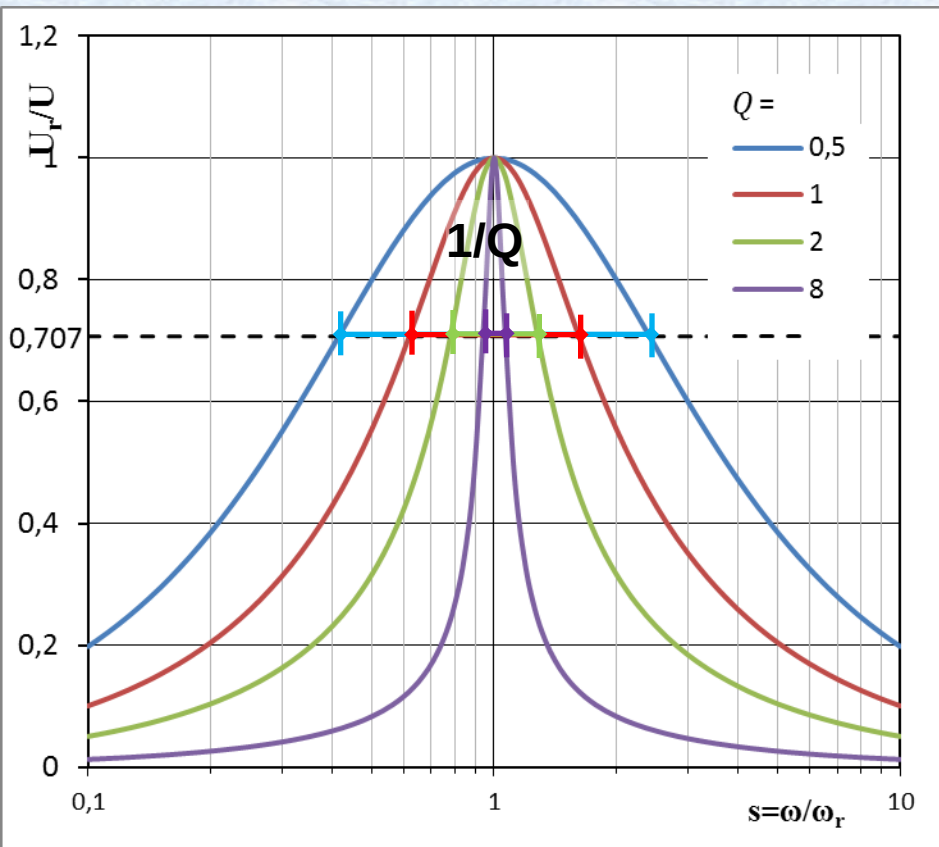
- fázový posun v krajních bodech pásma

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[1/(1 \pm j)]}{\operatorname{Re}[1/(1 \pm j)]} = \operatorname{arctg} \frac{\pm 1}{2} = \pm \frac{\pi}{4}$$

- šířka pásma rezonančního obvodu - frekvenční závislost
 - na normalizované frekvenční závislosti poměru
 - proudu ku rezonančnímu proudu



- **vliv jakosti rezonančního obvodu na frekvenční závislost**
 - zúžení šířky pásma
 - rychlejší změna fáze při změně frekvence



- Napětí na prvcích v sériovém rezonančním obvodu**

$$\left| \frac{\hat{U}_R}{\hat{U}} \right| = \left| \frac{1}{1+jQ\left(s-\frac{1}{s}\right)} \right|$$

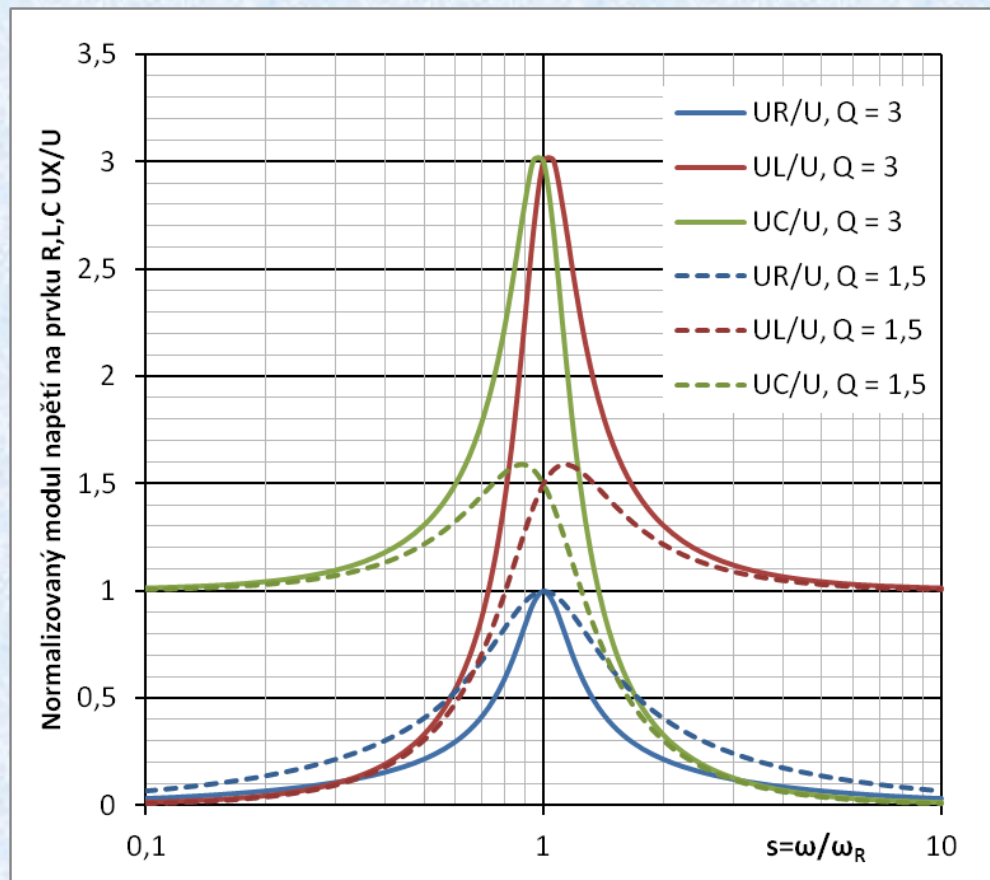
$$\left| \frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} \right| = \left| \frac{Q/js}{1+jQ\left(s-\frac{1}{s}\right)} \right|$$

$$\left| \frac{\hat{U}_L}{\hat{U}} \right| = \left| \frac{jsQ}{1+jQ\left(s-\frac{1}{s}\right)} \right|$$

– velikost napětí v rezonanci

$$U_{Lr} = U_{Cr} \doteq Q \cdot U$$

– riziko napěťového přetížení prvků



- **paralelní RLC obvod –**

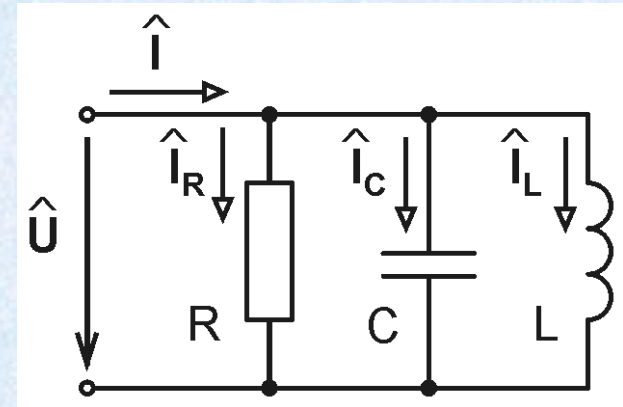
- admittance obvodu

- $$Y = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

- rezonanční frekvence, $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$, kdy je celková admittance reálná

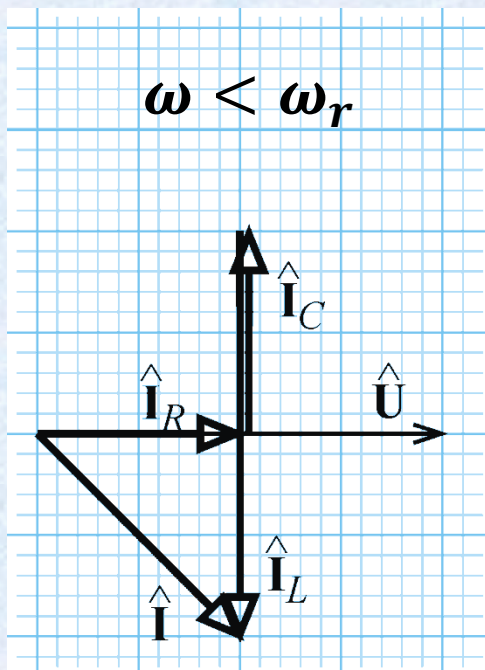
- proudová rezonanci – při konstantním napětí na svorkách zvýšení proudu, proudové přetížení prvků

- jen teoretický význam – reálný induktor má parazitní rezistor v sérii

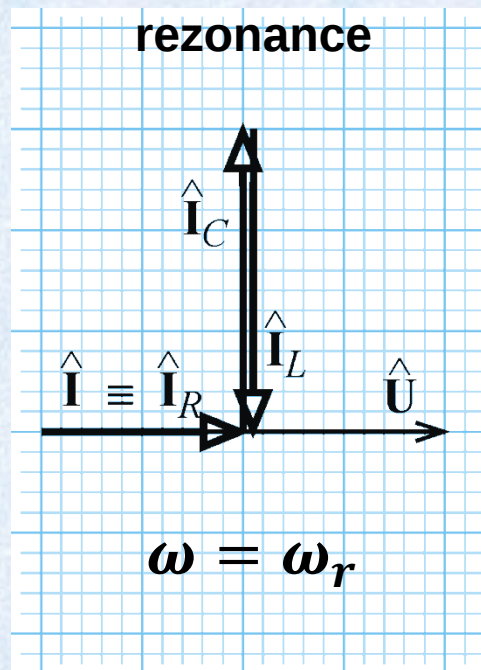
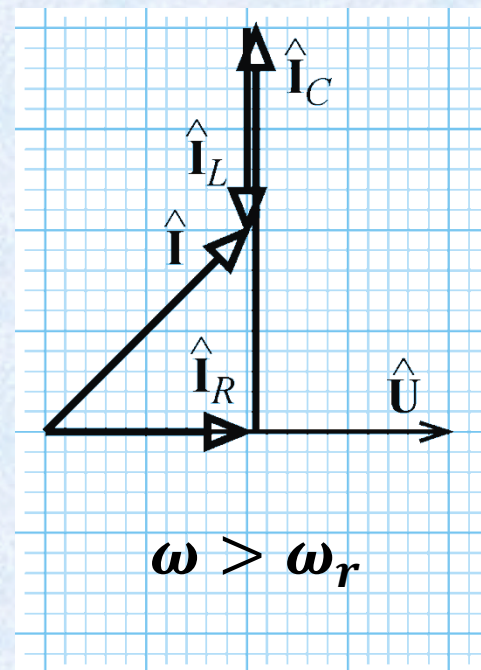


- fázorové diagramy paralelní RLC obvod

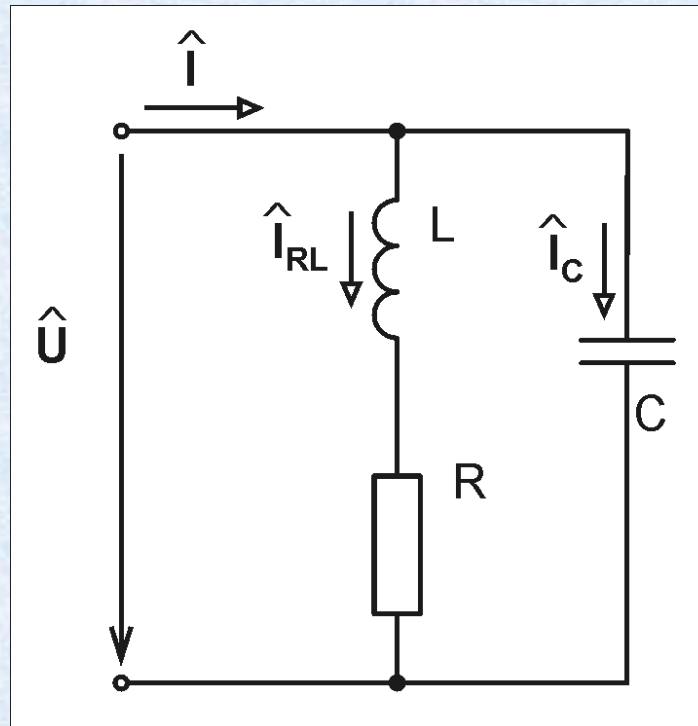
frekvence nižší než
rezonanční,
induktivní charakter



frekvence vyšší než
rezonanční,
kapacitní charakter



- **paralelní RLC obvod – s RL v sérii**
 - používané zapojení – lépe odpovídá realitě



- **paralelní RLC obvod – s RL v sérii**

- admittance

$$\mathbf{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

- rezonanční frekvence -

$$\omega_r C = \frac{\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \Rightarrow \frac{L}{C} = R^2 + \omega_r^2 L^2 \Rightarrow \frac{L}{C} -$$

$$R^2 = \omega_r^2 L^2 \Rightarrow \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \omega_r^2$$

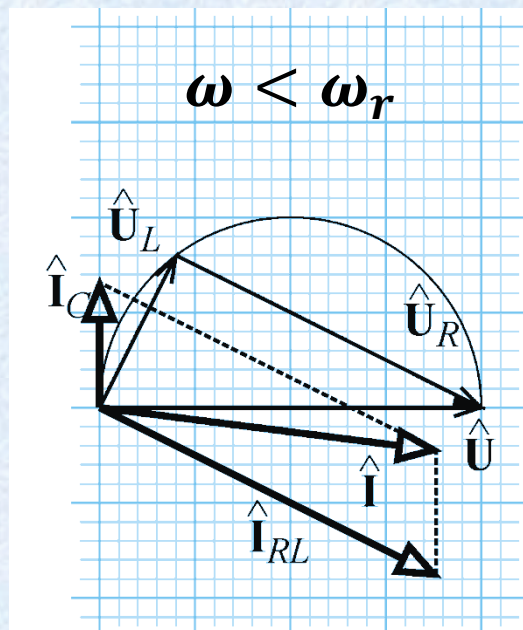
- velikost R má vliv na rezonanční frekvenci ω_r

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

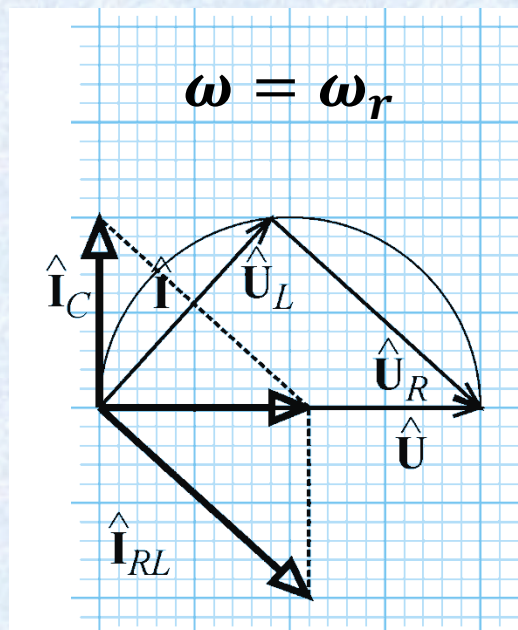
- **paralelní RLC obvod – RL v sérii**

– fázorový diagram

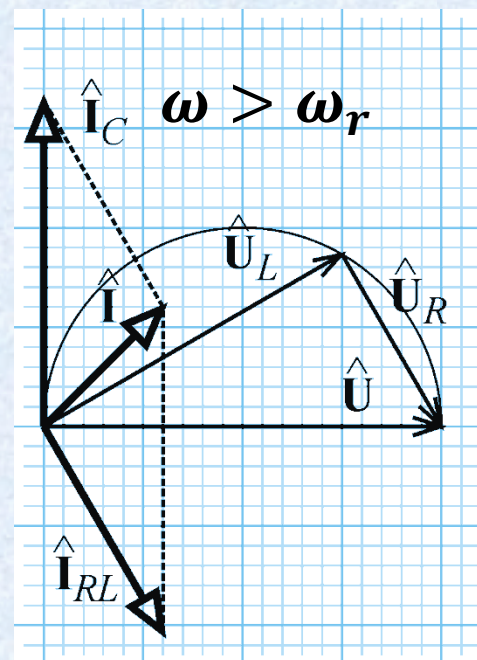
**frekvence nižší než
rezonanční,
induktivní charakter**



rezonance

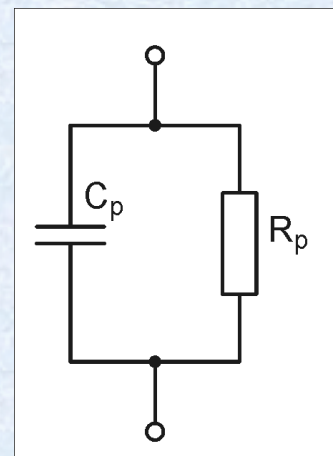
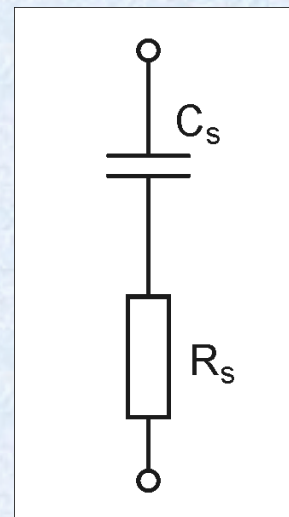


**frekvence vyšší než
rezonanční,
kapacitní charakter**



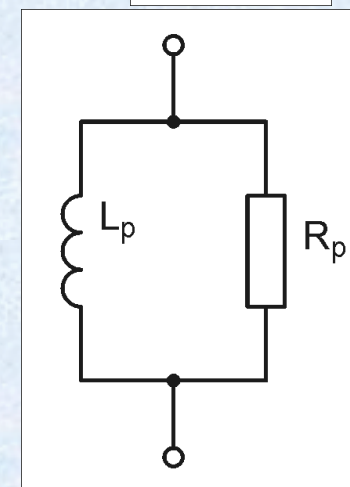
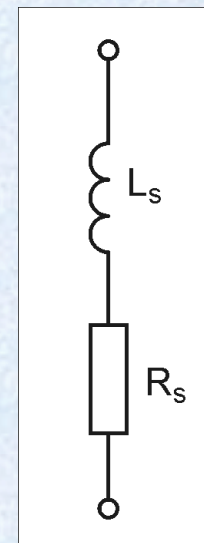
• Reálný kapacitor – náhradní ztrátový obvod

- sériové spojení kapacitoru a rezistoru
 - nulová frekvence (ss proud) – nulová admitance
 - vysoké frekvence – odpor R_s
- paralelní spojení kapacitoru a rezistoru
 - nulová frekvence (ss proud) – odpor R_p
 - vysoké frekvence – nulová impedance
- volba náhradního obvodu podle použití
 - přednostně paralelní spojení



• Induktor – náhradní ztrátový obvod

- sériové spojení induktoru a rezistoru
 - nulová frekvence (ss proud) – odpor R_s
 - vysoké frekvence – nulová admitance
- paralelní spojení induktoru a rezistoru
 - nulová frekvence (ss proud) – zkrat
 - vysoké frekvence – odpor R_p
- volba náhradního obvodu podle použití
 - přednostně sériové spojení

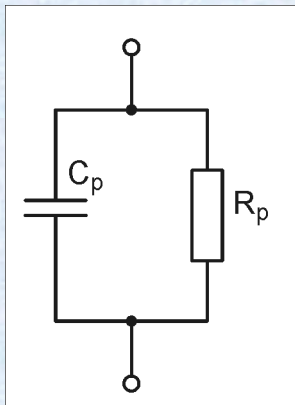


• ztrátový činitel D

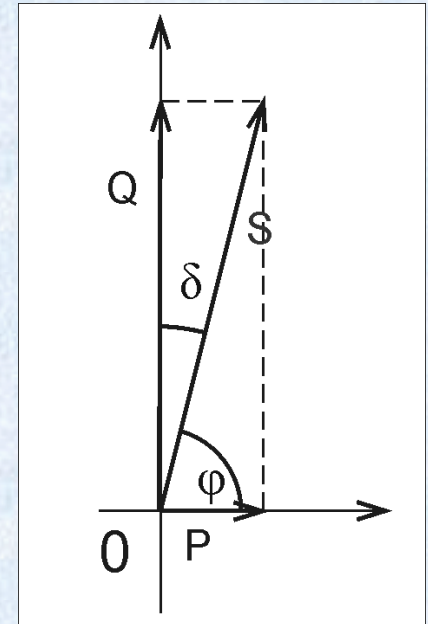
- poměr činného výkonu a jalového výkonu při stanovené frekvenci

$$D = \frac{P}{|Q|} = \operatorname{tg} \delta$$

- pro reálné kapacitory při paralelním náhradním ztrátovém obvodu



$$D = \frac{U^2 / R_p}{U^2 \omega C_p} = \frac{1}{\omega R_p C_p}$$



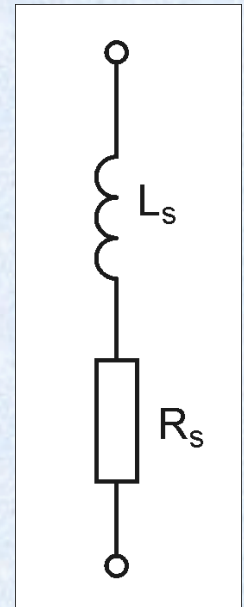
- **činitel jakosti Q**

- obecná definice
- poměr akumulované energie (tu co vrací prvek do obvodu) a ztracené energie během jedné periody
- označení Q (odlišovat od označení jalového výkonu, bezrozměrné)

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d}$$

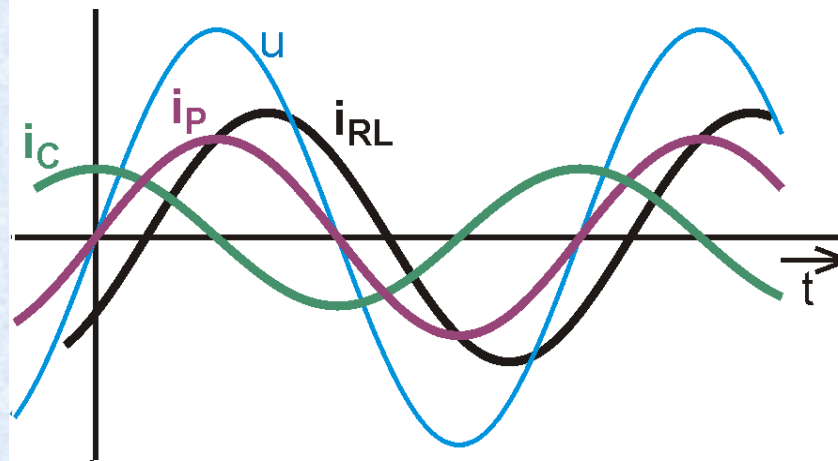
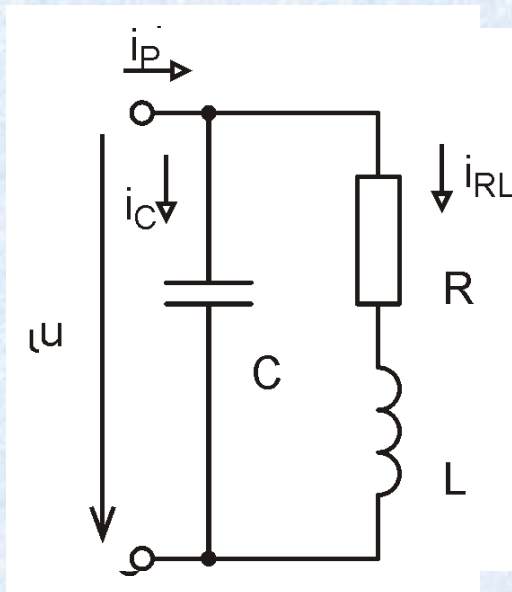
- Pro reálné induktory při sériovém náhradním ztrátovém obvodu:

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d} = 2\pi \frac{L_s I^2}{R_s I^2 T} = 2\pi f \frac{L_s I^2}{R_s I^2} = \frac{\omega L_s}{R_s}$$



• Zátěž s jalovým výkonem a jeho kompenzace

- odebírání část výkonu se vrací do sítě, proud je fázově posunutý, napájecími vodiči tečou větší proudy – zvýšení ztrát na přívodních vodičích a transformátorech, nutnost dimenzovat
- zářivky s elektromagnetickým předřadníkem, asynchronní motory



- kapacitor kompenzuje jalovou složku výkonu

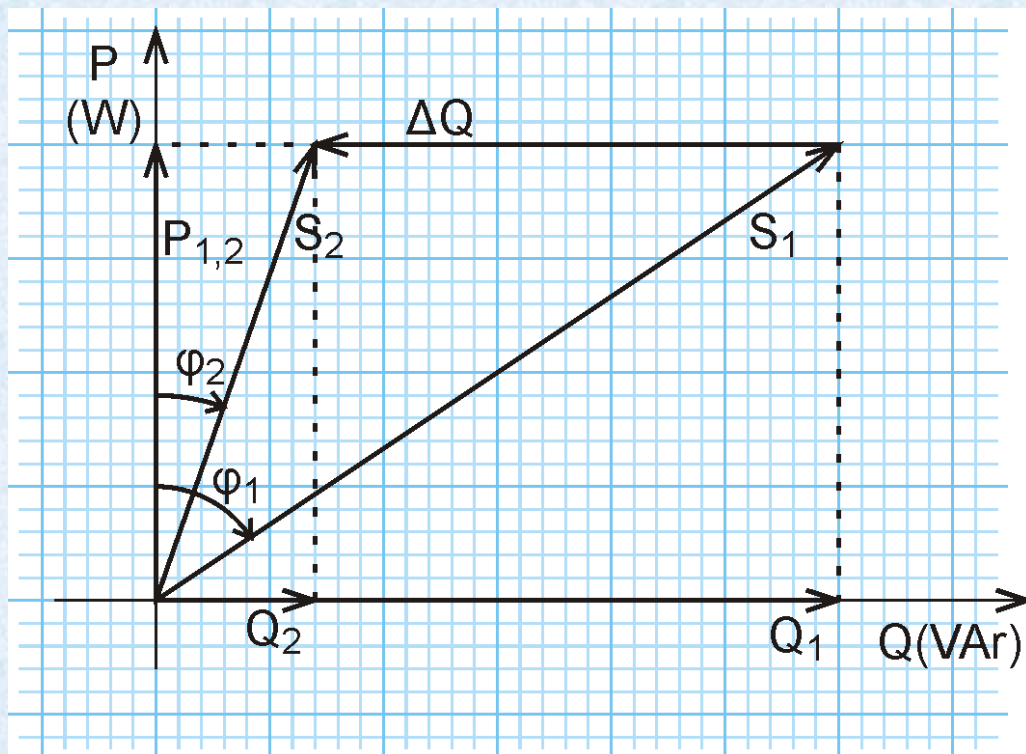
• velikost kompenzačního kondenzátoru – podle výkonů

- zátěž odebírá jalový výkon: $Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2}$
- Požadovaný účinník $\cos \varphi_2$ – převod na úhel φ_2 , $Q_2 = P_1 \cdot \tan \varphi_2$
- určí se jalový výkon, který má kompenzační kondenzátor odebrat
$$\Delta Q = Q_1 - Q_2$$

- kapacita kondenzátoru:

$$C = \frac{\Delta Q}{\omega U^2}$$

- výkon kompenzačního kondenzátoru se uvádí v VAr nebo kVAr



Děkuji za pozornost

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.