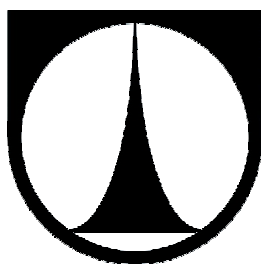


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická



ZÁVĚREČNÁ PRÁCE

LIBEREC 2013

Mgr. JAROMÍR OSČÁDAL

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Egyptské zlomky

Závěrečná práce programu DVPP

Liberec 2013

Autor

Mgr. Jaromír Osčádal

Vedoucí závěrečné práce

RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Studijní program: Další vzdělávání pedagogických pracovníků

Studijní obor: Rozšiřující studium matematiky pro 3. stupeň

EGYPTSKÉ ZLOMKY

EGYPTIAN FRACTIONS

Diplomová práce: 13–FP–KDM–ZP–070

Autor:

Mgr. Jaromír OSČÁDAL

Podpis:

.....

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Konzultant: .

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
37	2	15	1	12	0

V Liberci dne: 30. 8. 2013

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Oddělení dalšího vzdělávání

ZADÁNÍ ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

(pro program Dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků)

Kandidát:	Mgr. Jaromír Osčádal
Vzdělávací program:	Další vzdělávání pedagogických pracovníků
Název ZP:	Egyptské zlomky
Název ZP v angličtině:	Egyptian Fractions
Vedoucí práce:	RNDr. Daniela Bittnerová, Csc.
Termín odevzdání:	Prosinec 2013
Kód ZP:	13-FP-KDM-ZP-070

V Liberci dne 20.2. 2013

doc. RNDr. Miroslav Březina CSc.		RNDr. Daniela Bittnerová, Csc.
děkan		garant kurzu

Převzal (kandidát):	Mgr. Jaromír Osčádal		
Datum:		Podpis:	

Název ZP:	Egyptské zlomky
-----------	-----------------

Vedoucí práce:	RNDr. Daniela Bittnerová, CSc
----------------	-------------------------------

Cíl:	Seznámit se s problematikou egyptských zlomků. Prostudovat a porovnat (i historicky) některé metody pro jejich řešení. Vytvořit výukový materiál pro SŠ na dané téma.
------	--

Požadavky:	Znalosti základního kurzu matematiky na VŠ. Schopnost studovat odborné anglické texty, ovládat textový editor.
------------	--

Literatura:	Mgr. STACHOVCOVÁ, Lada. Vyjádření racionálního čísla pomocí egyptských zlomků. <i>Učitel matematiky</i>. 2001, roč. 9, č. 4, s. 211 BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. <i>Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie</i>. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 23. ISBN 80-719-6255-4. POLÁK, Josef. <i>Přehled středoškolské matematiky</i>. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 659 s. ISBN 978-807-1963-561. KOŘÍNEK, Vladimír. <i>Základy algebry</i>. 2. vyd. Praha: Československé akademie věd, 1953. BLEICHER, M.N. A new algorithm for the expansion of Egyptian fractions. <i>Journal of Number Theory</i>. 1972, vol. 4, issue 4, s. 342-382. DOI: 10.1016/0022-314X(72)90069-8. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022314X72900698 Učebnice matematiky pro základní školy. Sbírky úloh. Příručky matematických olympiád.
-------------	---

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou závěrečnou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo. Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé závěrečné práce pro vnitřní potřebu TUL. Užiji-li závěrečnou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše. Závěrečnou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím závěrečné práce.

Datum 31. 8. 2013 Podpis

Poděkování

Děkuji všem blízkým, že celou dobu studia mě podporovali a trpělivě snášeli všechny problémy spojené s mým studiem a nemocí.

Abstrakt

Tato diplomová práce "Egyptské zlomky" je přehledem tématu egyptských zlomků a ukázkou zpracovaných výukových materiálů. Je zde rozepsán binární rozklad, Fibonacci–Sylvesterův (hladový), Golombův a Erdősův algoritmus. Další kapitola popisuje základní operace s egyptskými zlomky a práci s nimi. V poslední části je zaznamenána tvorba výukového materiálu.

Klíčová slova: Egyptské zlomky, zlomky, racionální čísla, výuka.

Abstract

This thesis "The Egyptian Fractions" is an overview of the topic and it is also an example of prepared teaching materials of this theme. There is a binary decomposition, the Fibonacci–Sylvester (hungry) algorithm, the Golomb algorithm and the Erdős algorithm resolved. Another chapter describes the basic operations with Egyptians fractions and using them. The last part is a recorded production of educational materials.

Keywords: Egyptian fractions, fractions, the rational numbers, teaching.

Obsah

Seznam obrázků	1
Seznam grafů.....	2
Seznam tabulek	2
Seznam pojmů.....	3
Úvod	4
1. Historický úvod	5
1.1. Písmo a zápis čísel	5
1.2. Základní operace s celými čísly.....	9
1.2.1. Sčítání a odčítání	9
1.2.2. Násobení a dělení	10
2. Zlomky.....	10
2.1. Fibonacci–Sylvesterův (hladový) algoritmus	11
2.2. Binární rozklad	14
2.3. Golombův algoritmus.....	16
2.4. Erdősův algoritmus	18
3. Operace se zlomky.....	20
3.1. Základní tvar a porovnávání zlomků.....	20
3.2. Sčítání a odčítání zlomků	22
3.3. Násobení a dělení.....	24
4. Výukový materiál	28
4.1. Prezentace a pracovní listy	28
4.2. Moodle kurz.....	30
4.3. Odzkoušení ve třídách.....	32
Závěr.....	35
Použitá literatura	36
Obsah CD.....	37

Seznam obrázků

Obrázek 1 – Tabulka s nejstaršími egyptskými hieroglyfickými znaky a čísla pocházející z doby kolem roku 3200 př. Kr.....	5
Obrázek 2 – Narmerova palice opis reliéfu – číselné údaje jsou označené červeně; 3100 př. Kr.	6
Obrázek 3 – Ukázka hieroglyfického písma z XII. dynastie	6
Obrázek 4 – Ukázka hieratického písma z období XII. dynastie	7
Obrázek 5 – Ukázka démotického písma z 3. století př. Kr.	7
Obrázek 6 – Ukázka zápisu jednotlivých řádů v hieratickém písmu a hieroglyfickém písmu...	8
Obrázek 7 – Ukázky zápisu čísel	8
Obrázek 8 – Tabulka číselných údajů pro jednotlivé nomy na stěně chrámu v Karnaku u posvátného jezera	8
Obrázek 9 – Ukázky součtů se symbolickým zápisem; $123 + 1048 = 1171$, $314 + 68 = 382$, $330 + 1804 = 2134$	9
Obrázek 10 – Symbolické zápisy rozdílů: $54 - 22 = 32$, $113 - 34 = 79$, $201 - 24 = 177$	9
Obrázek 11 – Vedžat (Horovo oko)	10
Obrázek 12 – Ukázka zlomků Staré říše (zleva doprava) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	10
Obrázek 13 – Náhled dynamického snímku se skrytým textem.....	28
Obrázek 14 – Náhled pracovních listů	29
Obrázek 15 – Ukázka kurzu.....	31

Seznam grafů

Graf 1 – Výsledky skupiny L2 – A	33
Graf 2 – Výsledky skupiny L2 – B.....	33

Seznam tabulek

Tabulka 1 – Výsledná známka z testu	34
---	----

Seznam pojmů

faraón.....	titul používaný pro starověké panovníky Egypta. Název pochází z označení per-aa (velký dům).
foném.....	jeden konkrétní zvukový element řeči.
fonogram.....	znak písma představující foném, nebo skupinu fonémů.
determinativ	znak upřesňující význam předchozí skupiny znaků.
dynastie	označení pro skupinu spřízněných panovníků, většinou členů jedné dědičné rodiny, nebo skupinu panovníků vládnoucích ve stejném městě. Rozdělení staroegyptských panovníků do dynastií provedl ve 3. století př. n. l. kněz Manehto.
harpedonapt.....	egyptští zeměměřiči, známí svými dovednostmi a uměním důkazů.
hekat	starověká objemová míra představující měřici (4,805 l)
Hor.....	bůh v sokolí podobě představující spravedlivou vládu nad světem, chránící Egypt před vládou chaosu boha Sutecha. Jeho spodobněním je faraon.
Koptové.....	jsou původní Egyptané, název pochází z řečtiny.
LMS.....	řídící výukový systém (Learning Management System).
logogram.....	hieroglyfický znak představující zobrazovaný, nebo stejně znějící pojem.
Moodle.....	softwarový balíček pro tvorbu výukových webových kurzů. Je poskytován zdarma jako Open Source.
nom.....	administrativní celek ve starověkém Egyptě. Název pochází z řeckého slova pro kraj. V čele takového celku stál nomarcha. Starověký Egypt byl rozdělen na 42 nomů.
Open Source.....	program s volným otevřeným kódem, to znamená, že program je možné volně používat (volná licence) a programový kód lze volně upravovat.
ostrakon.....	střep hliněné nádoby, nebo vápencový odlomek, který se používal k zápisu méně důležitých textů. Název pochází z řečtiny.
Sutech	bůh chaosu představující cizí božstva, často ztotožňovaný s Baalem. Zobrazovaný jako složenina hyeny, fenka, okapy a osla.
papyrus.....	psací materiál vyráběný z šáchoru papírodárného. Byl znám svou lehkostí a skladností. Název pochází z koptštiny a znamená „patřící faraónovi“.
vedžat.....	Horovo oko, tento symbol měl mnoho významů. Bůh Horus při bitvě se Sutechem přišel o zrak. Jako náhradu získal vševidoucí oko. Tento symbol představoval objemové zlomky, nebo lidské smysly. Je i znakem božské moci. Zároveň představoval Slunce a Měsíc.
Flash Card	systém výukových karet v náhodném pořadí. Tato metoda se používá k zapamatování slovíček, nebo nových pojmů.

Úvod

Mezi vyhlášenými tématy závěrečných prací mě zaujalo téma „Egyptské zlomky“. Obdivuji staroegyptskou civilizaci, která přeskočila fázi městských států a rovnou vytvořila národní stát spojený s oblastí životodárného Nilu. Tato řeka byla jen jedním z důležitých prvků této civilizace. Aby mohl vzniknout tak vyspělý a organizovaný stát, musela existovat promyšlená struktura společnosti, která uměla efektivně kontrolovat a spravovat své zdroje. To bez znalostí matematiky nebylo možné. Podle historiků byli Egypťané konzervativní a matematiku brali jen jako nástroj pro řešení problémů, které přinášel život. Pozdější filozofický pohled na matematiku jako vědu plnou abstraktních definic, vět a důkazů prý neznali. To ale neznamená, že nepoužívali obecné postupy a neznali obecné dokazování. Jejich řešení se spíše podobaly receptům, ale to neubíralo nic na správnosti použitých postupů. Je možné, že ta největší tajemství matematiky si předávali ústně v chrámových školách jako i jiné národy tehdejší doby.

Práce se zlomky musela být při spravování daní, obchodu a přidělovém hospodářství nutnou součástí života. Zápis racionálního čísla ve tvaru egyptských zlomků nebyl z našeho pohledu přínosný, ale pro egyptskou civilizaci jistě nějakou výhodu měl. Tento zápis zlomků se navíc rozšířil po starověkém světě a byl užíván na Blízkém východě po celou dobu existence staroegyptského státu. Pro dnešní dobu nemá tento zápis zásadní význam, ale je velmi zajímavý pro zkoumání vlastností racionálních čísel a procvičování práce s nimi.

V tomto díle jsem chtěl nastínit několik postupů, jak vytvořit zápis racionálního čísla ve tvaru egyptských zlomků a ukázat práci s tímto zápisem. Protože i na střední škole studenti zápasí s racionálními čísly, rozhodl jsem se zpracovat toto téma pro středoškoláky ve formě procvičování práce se zlomky. Postupy tvorby zápisu egyptských zlomků jsou pro žáky přijatelné. I když v postupech je použita matematická indukce, vlastnosti posloupností a věty z teorie čísel, jsou tato řešení studentům střední školy dostupná.

Zároveň jsem si vytyčil úkol vytvořit pro žáky studijní materiál, pracovní listy a kurz pro LMS portál Moodle. Výhodou takto zpracovaného materiálu je, že ho lze použít jako podporu, nebo doplněk výuky matematického semináře.

1. Historický úvod

Z egyptských papyrů, které se nám dochovaly, můžeme usuzovat na vyspělost egyptské matematiky. Dochovanými texty jsou převážně opisy učebních příkladů pro písaře, ale nesou rysy hlubokých znalostí o geometrii, stereometrii a algebře. Dnes považujeme za tvůrce geometrie řecké filozofy, například Thalese Milétského a Pythagora. Sami řečtí učenci přiznávali, že se učili od Egyptanů. Vždyť ti museli zaměřit a postavit své úžasné stavby již v období 2500 př. Kr.. Každoroční záplavy a neustálé zaměřování polí, podle kterých se vyměřovali daně, osivo a přiděly, nutily egyptské zeměměřiče neustále vylepšovat své techniky. K tomu potřebovali obsáhlé znalosti, které obdivoval a popsal i řecký cestovatel Hérodotos v 5. století př. Kr.. Egyptská matematika je často považována za praktickou bez důkazů, ale mnohé slovní úlohy nesou rysy abstraktních úvah. Dokonce i Démokritos (5. století př. Kr.) se chlubil, že soupeřil v dokazování s egyptskými harpedonapty (zeměměřiči), kteří ovládali umění důkazů. To vše ukazuje, že písemné doklady o skutečných znalostech egyptských matematiků nám chybí. Možná tedy vděčíme starověkému Egyptu za více, než si myslíme. Dokonce i hláskové písmo, které mnoho lidí přisuzuje Féniciánům, vzniklo úpravou z egyptského vzoru.

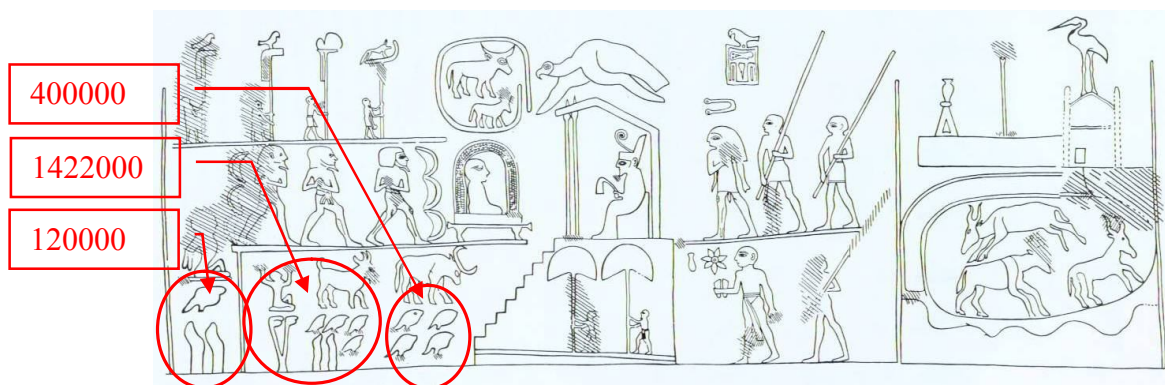
1.1. Písmo a zápis čísel

Nejstarší dochované matematické texty jsou sice z období Střední říše (1994–1797 př. Kr.), ale počátky matematiky a zápisu čísel v Egyptě sahají až do Předdynastického období. V této době vznikaly první symboly pro čísla, základní pojmy a označení jednotlivých oblastí (nomů). První písemné záznamy byly spíše ve formě heslovitých nápisů na ostrakonech a pečeti. Spíše sloužily k označení množství a původu zboží, nebo nesly informaci o dárci. Právě na těchto nápisích můžeme pozorovat první symboly představující různá čísla. Velmi pěknou ukázkou jsou etikety z královských hrobek v Abydu, nebo na Narmerově palici.



Obrázek 1 – Tabulka s nejstaršími egyptskými hieroglyfickými znaky a čísla pocházející z doby kolem roku 3200 př. Kr.¹

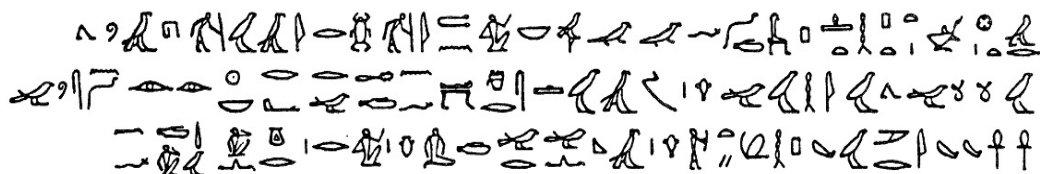
¹ VYMAZALOVÁ, Hana a Filip COPPENS. *Moudrost svitků boha Thovta: vědecké poznání za vlády faraonů*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, 2011, 352 s. ISBN 978-807-3083-588. strana 45



Obrázek 2 – Narmerova palice opis reliéfu² – číselné údaje jsou označené červeně; 3100 př. Kr.

Společně s vývojem hieroglyfického a hieratického písma na konci 4. tisíciletí př. Kr. vytvořili Egypťané symboly pro desítkové řady, které pak používali po celou dobu existence své civilizace.

Hieroglyfická podoba písma i číslic je obrázková a představuje asi okolo 6000 znaků, přesto nejde o primitivní obrázkový systém. V různých dobách se počet používaných znaků měnil, aktivně se jich však užívalo asi jen 1000. Nejstarší znaky byly logogramy, které znázorňovaly určitá celá slova, nebo slova foneticky podobná. Druhou skupinou byly fonogramy, které představovaly hlásky, nebo skupiny hlásek. Poslední skupinou jsou determinativy, které upřesňují význam slova. Hieroglyfické písmo si udrželo svou podobu jako chrámové (božské) písmo pro výzdobu hrobek a chrámů.

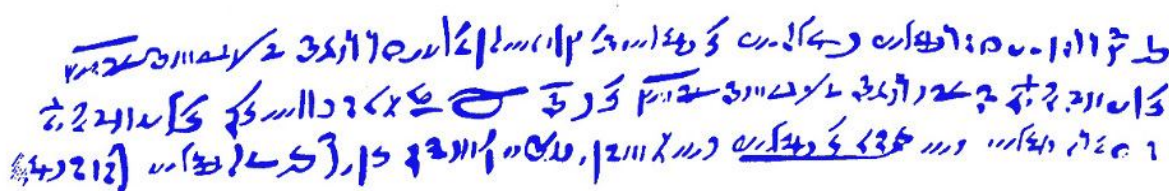


Obrázek 3 – Ukázka hieroglyfického písma z XII. dynastie³

Přibližně stejně starým typem písma je kněžské neboli hieratické písmo, které bylo zjednodušenou podobou písma hieroglyfického. Sloužilo pro běžné zápisy obchodních, úředních, literárních i náboženských textů. Původní zápis ve sloupcích (stejně jako u hieroglyfů) byl v období XI. dynastie nahrazen psaním zprava doleva. Postupně se v kurzívní podobě písma spojovaly jednotlivé znaky pro rychlejší zápis.

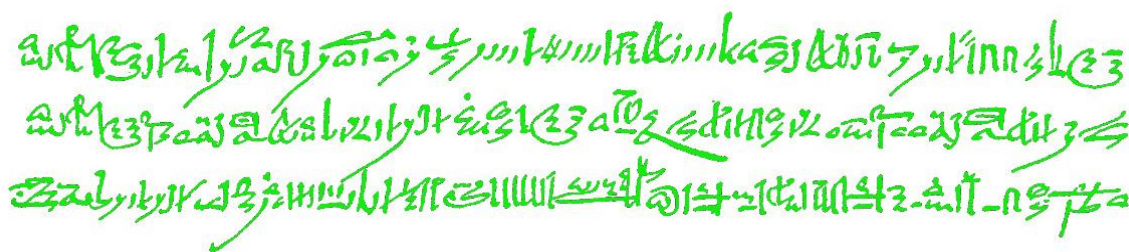
² BRASS, Michael. The Narmer Macehead and related objects. *Journal of the American Research Center in Egypt* XXVII: 53-59. *The Antiquity of Man* [online]. 1. vyd. 1990 [cit. 2013-05-25]. Dostupné z: http://www.antiquityofman.com/millet_narmer_macehead.html

³ BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky, sv. 23. ISBN 80-719-6255-4. strana 12



Obrázek 4 – Ukázka hieratického písma z období XII. dynastie⁴

Od 8. století př. Kr. používali Egypťané démotické neboli lidové písmo. To už postrádá obrázkový charakter a je spíš zkratkovitým zápisem, který vychází z hieratického písma. To způsobuje, že tento zápis je velmi špatně čitelný. Posledním typem písma je koptské, které však používalo řecké znaky a vybrané démotické fonémy. V našich ukázkách jsem jednotlivá písma barevně odlišil: hieroglyfické znaky jsou psány černě, hieratické modře a démotické zeleně. Protože hieroglyfy jsou z nich nejčitelnější, často se hieratické a démotické texty přepisují do hieroglyfů.

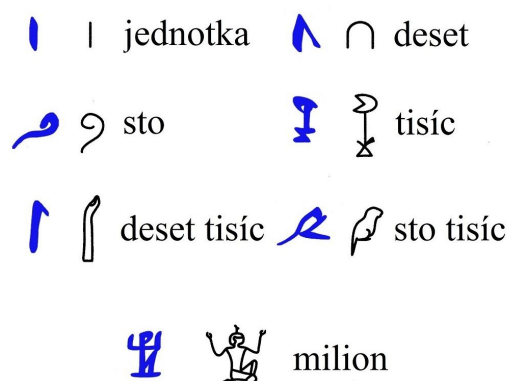


Obrázek 5 – Ukázka démotického písma z 3. století př. Kr.⁵

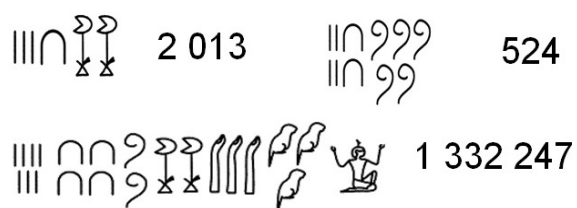
V číslech byla situace jednodušší, každý desítkový řád byl představován jedním znakem, který se opakoval podle počtu v daném řádu jednou až devětkrát. Pro jednotky se užíval znak měřicí hole, pro desítky kraví pouta (některé prameny uvádí, že tento symbol označuje kost, nebo sepnuté ruce), stovky představoval měřící provazec délky sta loktů, pro tisícovku používali znak lotosového květu, protože ve velkém množství pokrývaly klidné zátoky Nilu, desetitisíce zobrazovali ukazovákem (snah podle počtu usekaných prstů nepřátel), řád statisíců představoval symbol pulce (připomínající počet pulců v deltě Nilu v období záplav) a nakonec klečící postava představující milion (snad postava boha vzduchu a prostoru). Symbol pro milion byl převážně používán jen ve Staré říši a častěji měl význam nekonečného množství, než milionu. Tak velké číslo Egypťané nepotřebovali. Stejně v nepozičním desítkovém systému nepotřebovali symbol pro nulu. Jen v účetních knihách pro nulový zůstatek (rovnost výdajů a příjmů) používaly symbol takzvané egyptské nuly .

⁴ BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky, sv. 23. ISBN 80-719-6255-4. strana 12

⁵ BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky, sv. 23. ISBN 80-719-6255-4. strana 12



Obrázek 6 – Ukázka zápisu jednotlivých řádů v hieratickém písmu a hieroglyfickém písmu



Obrázek 7 – Ukázky zápisu čísel

Čísla ve všech písmech se zapisovala shora dolů, nebo zprava doleva, ale i výjimky naleznete. Na následujícím snímku je zápis o nomech ze stěny chrámu u posvátného jezera v Karnaku. Tento zápis se váže k vyobrazení vlevo, proto text jde zleva doprava a znaky jsou obrácené.



Obrázek 8 – Tabulka číselných údajů pro jednotlivé nomey na stěně chrámu v Karnaku u posvátného jezera

1.2. Základní operace s celými čísly

Symbolický zápis, jak ho známe dnes, se nepoužíval. Vše se popisovalo slovně. Egypťané znaly základní matematické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. V plošných jednotkách můžeme dokonce mluvit o umocňování a odmocňování. V úlohách se používaly formule imperativu „má se učinit“, „má se dělat“ (ve smyslu „má se počítat“).

1.2.1. Sčítání a odčítání

Nepoziční desítkový systém, který staří Egypťané používali, nebyl příliš odlišný od našeho a umožňoval pro celá čísla jednoduchý systém sčítání jednotlivých řádů (až do milionů). Bylo jen důležité vnímat i nezapsané řády a uvědomit si opačný směr psaní. V zápisu užívali pro sčítání slova *iri* (dělat = počítat), *wah* (spojit) a *demedž* (sjednotit). Na následující obrázku je pro přehlednost sčítání zapsáno moderní symbolikou pod sebe.

Obrázek 9 – Ukázky součtů se symbolickým zápisem;

$$123 + 1048 = 1171, 314 + 68 = 382, 330 + 1804 = 2134$$

I odčítání v nepozičním desítkovém systému se podobalo našemu odčítání. Opět je jen důležité rozeznat jednotlivé řády a pamatovat i na ty nezapsané (viz. třetí příklad na následující obrázku. Pro slovní popis používali slova *iri wedžat*, *iri aa*, ve formulacích „spočítej zbytek x za y “, nebo „spočítej velikost těch x k těm y “ ($x - y$). Výsledek byl většinou označován jako *wedžat* (zbytek).

Obrázek 10 – Symbolické zápisy rozdílů:

$$54 - 22 = 32, 113 - 34 = 79, 201 - 24 = 177$$

1.2.2. Násobení a dělení

V této části se pro jednoduchost vrátíme k arabskému zápisu číslic podle našich zvyklostí. Metody násobení a dělení jsou postavené na podobném principu, proto z mnohých zápisů nejde rozeznat, zda se jedná o násobení, nebo dělení. Je zde využita přímá úměrnost. Celočíslné násobení a dělení sice není často plně zaznamenáno, ale princip násobení lze odvodit z práce se zlomky a smíšenými čísly.

Nejprve si vytvoříme tabulku dvojnásobků, čtyřnásobků,... činitele (dělitele) a potom sečteme tyto násobky, dokud nedosáhneme požadované hodnoty. Protože každé celé číslo lze vyjádřit ve dvojkové soustavě pomocí součtu jednotlivých mocnin dvou, můžeme z daných násobků sestavit libovolný násobek činitele. Znalost vlastností dvojkové soustavy ale u starověkých matematiků nemůžeme předpokládat. Pokud to je výhodné, můžeme použít i desetinásobky a pětínásobky (stejně jako ve starověkém Egyptě). Ve slovním vyjádření používali Egyptané pro násobení formulace „sečti x y -krát“ se slovesem *iri* a *wah* a slovo *sep* ve významu krát.

Příklad 1

Vypočítejme násobek 11 a 27.

Vybereme si větší činitel a sestavíme tabulku dvojnásobků.

\1	27
\2	54
4	108
\8	216

Číslo 11 vyjádříme jako součet $11 = 8 + 2 + 1$. Vybrané řádky s násobky označovali Egyptané čárkou na začátku řádku. Výsledek je součtem násobků u vybraných řádků $216 + 54 + 27 = 297$. I nepoziční systém umožňuje dobré násobení deseti, a proto násobení můžeme zapsat i takto:

\1	27
\10	270

Dělení provedeme podobně. Vytvoříme si tabulku násobků dělitele, které jsou menší než dělenec. Z tabulky vybíráme násobky, které po sečtení dají dělenec. Vybrané řádky opět označíme podle zvyklostí. Výsledkem dělení je součet násobitelů dělitele na začátku řádku. Pro dělení používali Egyptané formulaci „počítej s x pro nalezení y “ ($y \div x$). Použitá slova byla *iri* (počítej) a *gemet* (pro nalezení).

Příklad 2

Vydělme číslo 221 číslem 13.

Nejprve sestavíme tabulku násobků dělitele:

\1	13
2	26
4	52
8	104
\16	208

Nebo:

1	13
\2	26
\10	130
\5	65

Číslo 221 můžeme získat součtem hodnot $208 + 13$, nebo $130 + 65 + 26$. Výsledek dělení je 17 ($16+2$, nebo $10+5+2$). Násobky pěti vznikly půlením násobků deseti. Metodu půlení Egyptané také ovládali.

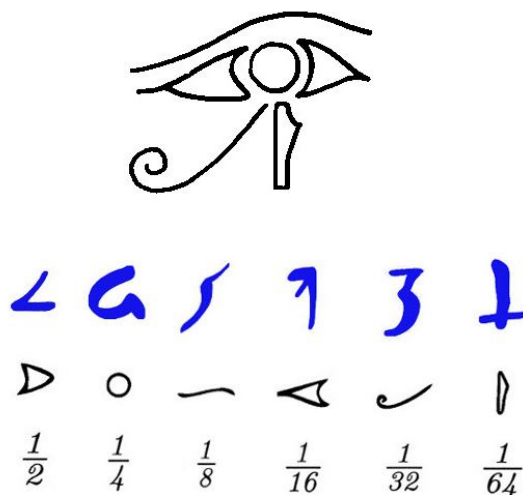
Kromě násobení a dělení znali operace umocňování v plošných jednotkách. V Moskevském papyru se dokonce objevuje výraz *seš* ve významu mocnina. Odmocňování vyjadřovali slovem *kenbet*. V dochovaných materiálech se většinou jednalo o bezproblémové celočíselné odmocnění. Jednoduše tyto operace popisuje ve své knize i H. Vymazalová:

*Ohledně způsobu egyptského odmocňování se předpokládá, že podobně jako u umocňování, byla i zde použita geometrická cesta spolu s empiricky zjištěnými vztahy mezi čísly.*⁶

⁶ BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 23. ISBN 80-719-6255-4, strana 140

2. Zlomky

Počítání se zlomky bylo pro písáře nutností. Rozdělovali přídělý pšenice podle zásluh, nebo předem daných poměrů. Pojem zlomků tedy znali již ve Staré říši a možná i dříve. Prvotní zlomky vznikly z procesu půlení. Příkladem takových zlomků je Horovo oko odpovídající zlomkům objemové jednotky hekat. Tento systém se používal už v době VI. dynastie. Celý symbol představuje $\frac{63}{64}$ hekat a jeho částmi jsou zlomky $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.



Obrázek 11 – Vedžat (Horovo oko)

Kromě zlomků vedžat byly známy ve Staré říši i kmenné zlomky $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ a jejich doplňky do jedné $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$. Symboly některých zlomků jsou na následujícím obrázku.



Obrázek 12 – Ukázka zlomků Staré říše (zleva doprava) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$

Postupem doby zůstaly pouze kmenné zlomky a $\frac{2}{3}$. Racionální čísla větší jak jedna se vyjadřovala ve tvaru smíšených čísel a části menší než jedna se zapisovaly pomocí vzájemně různě

⁷ BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky, sv. 23. ISBN 80-719-6255-4 strana 43

ných kmenných zlomků. Tento systém zápisu nazýváme egyptský zlomek. Egyptané neznali desetinný zápis čísla, jejich systém byl nepoziční a znaky pro desetinné řády neměli.

Definice 1

Racionální číslo $0 < \frac{a}{b} < 1; a, b \in \mathbb{N}$ zapsané jako součet (seznam) konečného množství vzájemně různých kmenných zlomků nazýváme egyptský zlomek.

Egyptané sice pro své zápisy zlomků ještě navíc používali číslo $\frac{2}{3}$, ale pro naše další úvahy použijeme tuto definici egyptského zlomku. V hieroglyfech se kmenné zlomky zapisovaly znakem  nad číslovkou (např. $\frac{1}{10} = \overline{\text{X}}$), v hieratickém písmu se nad číslovkou zapisovala tečka (např. $\frac{1}{10} = \text{X}^\cdot$). V tabulkách zlomků je symbol $2/n$ zapsán zdvojením znaku, ale jinak se zdvojení stejného kmenného zlomku nepoužívalo. To dokazují i tyto převodní tabulky. Rozložit zlomek na vzájemně různé kmenné zlomky není zrovna jednoduchá činnost. V následujících podkapitolách si ukážeme několik postupů na hledání takových rozkladů.

2.1. Fibonacci–Sylvesterův (hladový) algoritmus

Tento postup zápisu racionálního čísla ve tvaru egyptského zlomku je nejznámější a nejpoužívanější. Vždy hledáme největší kmenný zlomek, který se vejde do daného racionálního čísla. Ukážeme si, že tento postup vede k vyjádření racionálního čísla konečným počtem kmenných zlomků. Poprvé tento postup uveřejnil v roce 1202 Leonardo z Pisy známým jako Fibonacci ve svém díle „Liber Abaci“ (Kniha počtů). Podrobněji ho popsal roku 1880 J. J. Sylvester. Často se tento algoritmus nazývá hladovým, protože „hladově“ vybíráme největší kmenný zlomek, který je ve zlomku obsažen.

Kmenné zlomky jsou členy harmonické posloupnosti, která je klesající. Pokud tedy vezmeme libovolné racionální číslo $\frac{a}{b}$ menší než jedna, které není kmenným zlomkem, musí existovat přirozené číslo n , pro které platí: $\frac{1}{n+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n}$. Jak takové n určíme?

Věta 1

Jestliže $\frac{a}{b}$ je racionální číslo v základním tvaru, menší než jedna a zapsané pomocí přirozených čísel $a, b \in \mathbb{N}; a \neq 1$, pak existuje přirozené číslo n , pro které platí $\frac{1}{n+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n}$, přičemž n je celá část zlomku $\frac{b}{a}$ a $\frac{1}{n+1}$ je největší kmenný zlomek, který je menší než $\frac{a}{b}$.

Důkaz

Pokud je $\frac{a}{b}$ menší než jedna, musí platit $1 < a < b; b = a \cdot n + r; n \in \mathbb{N}; r \in \{1, 2, \dots, a-1\}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{n \cdot a + r} = \frac{1}{n + \frac{r}{a}} > \frac{1}{n+1}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{n \cdot a + r} = \frac{1}{n + \frac{r}{a}} < \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{a}{b} > \frac{1}{n+1}.$$

Protože harmonická posloupnost je klesající, je zlomek $\frac{1}{n+1}$ největší, který se vejde do zlomku $\frac{a}{b}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{n \cdot a + r}{a} = n + \frac{r}{a} < n+1; \quad \frac{b}{a} = \frac{n \cdot a + r}{a} = n + \frac{r}{a} > n; \quad \Rightarrow n+1 > \frac{b}{a} > n.$$

$0 < \frac{r}{a} < 1 \Rightarrow$ Z definice je n celá část po dělení čísla b číslem a . Důkaz je hotov.

Nyní můžeme přistoupit k důkazu, že každé kladné racionální číslo menší než jedna lze zapsat pomocí egyptských zlomků. Použijeme matematické indukce. Druhý krok sice není tradičně definován, vycházíme z předpokladu, že výrok platí nejen pro $k-1$, ale pro všechna přirozená čísla menší než k .

1. krok – Dokažme, že každý zlomek $\frac{1}{b}; b \in \mathbb{N}$ lze zapsat ve tvaru egyptského zlomku.

Tento krok žádný důkaz nepotřebuje, samotný zlomek je kmenným zlomkem a proto sám splňuje podmínku definice egyptského zlomku.

2. krok – Předpokládejme, že zlomky $\frac{a}{b}; b, a \in \mathbb{N}; 0 < a < k$ lze vyjádřit ve tvaru egyptského zlomku. Říkáme tím, že jmenovatel může být libovolný a číselník je menší než k .

3. krok – Dokažme, že toto platí i pro zlomky $\frac{a}{b}; b, a \in \mathbb{N}; a = k > 1$.

Předpokládejme, že $\frac{k}{b}$ je v základním tvaru. Platí: $b = k \cdot n + r > 1; n \in \mathbb{N}; r \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

$$\Rightarrow \frac{k}{b} - \frac{1}{n+1} = \frac{k \cdot (n+1) - b}{b \cdot (n+1)} = \frac{k \cdot (n+1) - (k \cdot n + r)}{b \cdot (n+1)} = \frac{k-r}{b \cdot (n+1)}.$$

Výsledek je buď kmenný zlomek (pro $r = k-1$) $\frac{1}{b \cdot (n+1)} \neq \frac{1}{n+1}; \frac{k}{b} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{b \cdot (n+1)}$, nebo zlomek s číselníkem $(k-r) \in \{2, \dots, k-1\}$ a podle 2. kroku ho lze zapsat ve tvaru egyptského zlomku. Stačí ukázat, že v tomto rozkladu jsou kmenné zlomky menší než $\frac{1}{n+1}$.

Ukážeme si, že platí nerovnost $\frac{k}{b} < \frac{2}{n+1}$ za předpokladu $1 < k < b$.

$$\frac{k}{b} < \frac{2}{n+1}$$

$$k \cdot (n+1) < 2b = 2k \cdot n + 2r$$

$$k \cdot n + k < 2k \cdot n + 2r$$

$0 < k \cdot (n-1) + 2r$, protože $0 \leq n-1$; $1 < k$; $n \in N$; $r \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, musí tato nerovnost platit.

Dále tedy platí: $\frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+1} > \frac{k}{b} - \frac{1}{n+1} = \frac{k-r}{b \cdot (n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{k-r}{b \cdot (n+1)}$, v zápisu čísla $\frac{k-r}{b \cdot (n+1)}$ musí být menší kmenné zlomky. Důkaz je hotov.

Dokázali jsme, že každý kladný zlomek menší než jedna lze vyjádřit ve tvaru egyptského zlomku. Z důkazu lze odvodit i víc.

Věta 2

Každé racionální číslo v základním tvaru $0 < \frac{a}{b} < 1$; $a, b \in N$ lze vyjádřit pomocí hladového algoritmu maximálně a vzájemně různými kmennými zlomky.

Důkaz

Pro $b = a \cdot n + r$; $n \in N$; $r \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ dostaneme: $\frac{a}{b} = \frac{1}{n+1} + \frac{a-r}{b \cdot (n+1)}$. Vytvořili jsme jeden kmenný zlomek a v nejhorším případě zbylý zlomek zmenšil čitatele o jedničku. Pokud budeme takto pokračovat v každém kroku a zbylý zlomek bude v základním tvaru, budeme muset proces provést v $a-1$ krocích. V posledním kroku vzniknou dva kmenné zlomky. Tedy v nejhorší variantě to znamená a kmenných zlomků. Důkaz je hotov.

Ukážeme si postup na konkrétním příkladě.

Příklad 3

Vyjádřete zlomek $\frac{3}{7}$ pomocí hladového algoritmu.

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow \frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21}$$

$$21 = 2 \cdot 10 + 1 \Rightarrow \frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

2.2. Binární rozklad

Binárních algoritmů je více. Hlavní myšlenkou je, že číslo v binárním zápisu můžeme zapsat pomocí nul a jedniček. Číslo menší než jedna je tedy zapsáno v binárním zápisu pomocí kmenných zlomků $\frac{1}{2^k}; k \in \mathbb{N}$. Ty, co mají binární zápis konečný, rovnou představují egyptský zlomek. Problém nastává u čísel s nekonečným zápisem. Taková racionální čísla lze zapsat s periodou. Tu můžeme interpretovat jako geometrickou posloupnost s kvocientem 2^m , kde m je velikost periody. Pokud budeme jednotlivé řady periody sčítat od řádu (pozice) nižšího než 2^{-m} , dají se tyto součty vyjádřit také jako m různých kmenných zlomků ve tvaru

$$\frac{1}{2^r \cdot (2^m - 1)}.$$

Věta 3

Každý zlomek $0 < \frac{a}{2^n b} < 1$, kde $a < 2^{n+1}$ lze zapsat pomocí $n+1$ různých kmenných zlomků.

Důkaz

Z nerovnosti $a < 2^{n+1}$ plyne, že $a = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^n a_n; a_j \in \{0, 1\}; j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$\frac{a}{2^n b} = \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^n a_n}{2^n b} = \frac{1}{b} \left(a_0 \frac{1}{2^n} + a_1 \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + a_n \right)$, to představuje součet různých kmenných zlomků ve tvaru $\frac{1}{2^r \cdot b}; 0 \leq r \leq n$. Důkaz je hotov.

Věta 4

Pro každé racionální číslo $0 < \frac{a}{b} < 1$ můžeme zvolit takové číslo $m \in \mathbb{N}$ a čísla $c_1, c_2, \dots, c_m \in \{0, 1\}$, že platí:

$$2^{-1}c_1 + 2^{-2}c_2 + \dots + 2^{-m}c_m \leq \frac{a}{b} < 2^{-1}c_1 + 2^{-2}c_2 + \dots + 2^{-m}c_m + 2^{-m}$$

Důkaz

Toto tvrzení plyne z binárního zápisu libovolného racionálního čísla. Zápis $2^{-1}c_1 + \dots + 2^{-m}c_m$ není ničím jiným než rozpisem m cifer v binárním zápisu čísla $\frac{a}{b}$. Rovnost platí pro ukončený binární zápis. Druhá nerovnost nám jen říká, že rozdíl $\frac{a}{b} - (2^{-1}c_1 + 2^{-2}c_2 + \dots + 2^{-m}c_m)$ je menší než 2^{-m} . Odpovídá totiž zbytku ciferného zápisu čísla $\frac{a}{b}$ s řády nižšími než $-m$. Ten je vždy menší než 2^{-m} . Důkaz je hotov.

Důsledkem obou vět je jednoduchý algoritmus, kterým můžeme rozložit zlomek menší než jedna na tvar egyptského zlomku. Pokud podle věty 4 zvolíme m , pro které platí $a < 2^{m+1}$, zbytkovou hodnotu zlomku už rozložíme podle věty 3. Protože $a < b$ a zbytkový zlomek je menší než 2^{-m} . V takovém případě jsou vzniklé kmenné zlomky různé.

Podobný výsledek dostaneme i v případě rozboru binárního zápisu racionálního čísla a přepisu periody podle pravidel zmíněných na začátku (využití geometrické posloupnosti). Takový postup patří k těm jednodušším.

Příklad 4

Vyjádřete zlomek $\frac{3}{7}$ pomocí binárního algoritmu.

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4};$$

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4 \cdot 7} = \frac{1+4}{4 \cdot 7} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{1}{28} + \frac{1}{7};$$

$$\text{Výsledek je } \frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4} \frac{1}{7} \frac{1}{28}.$$

Další možnost

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} < \frac{3}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{3}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{24-14-7}{8 \cdot 7} = \frac{3}{8 \cdot 7} = \frac{1+2}{8 \cdot 7} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{56} + \frac{1}{28};$$

$$\text{Výsledek je } \frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} = \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{28} \frac{1}{56}.$$

Postup z binárního zápisu

$$\frac{3}{7} = \frac{(11)_2}{(111)_2} = (0, \overline{011})_2, \text{ pokud chceme vyjádřit periodu pomocí kmenných zlomků, musíme}$$

aspoň stejnou délku jako má perioda vyjádřit podle věty 4. Zbylou periodu s kvocientem 2^{-3} zapíšeme pomocí součtu nekonečné geometrické řady.

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} &= \frac{(11)_2}{(111)_2} = (0, \overline{011})_2 = (0, 011 + 0,000\overline{011})_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1-2^{-3}} \cdot \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2^3}{2^3-1} \cdot \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^3-1} \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} = \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{28} \frac{1}{56}. \end{aligned}$$

Vidíme, že máme několik možností postupu a to s různými výsledky podle volby m . Podobné rozklady používali starověcí Egypťané v objemových jednotkách, které převážně vyjadřovali pomocí zlomků z geometrické posloupnosti $\frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N}$. Ty odpovídaly částem Horova oka.

2.3. Golombův algoritmus

Tento algoritmus je zajímavý tím, že nám umožňuje odhad největšího jmenovatele kmenných zlomků při tomto rozkladu. S. W. Golomb tento postup publikoval v roce 1962. V konstrukci algoritmu je využita Bezoutova identita.

Lemma 1 – Bezoutova identita

Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou čísla různá od nuly a d je společný dělitel čísel a a b , pak existují nenulová čísla $x, y \in \mathbb{Z}$, pro která platí: $a \cdot x + b \cdot y = d$.

Důkaz této věty je znám. Můžeme ho založit na Euklidově algoritmu hledání společného dělitele a a b . Zpětný postupem nalezneme jedno řešení x_0, y_0 .

Protože $t \in \mathbb{Z}$; $a \cdot (-b \cdot t) + b \cdot (a \cdot t) = 0$. Zapišeme množinu všech řešení ve tvaru:

$x = x_0 - b \cdot t$; $y = y_0 + a \cdot t$; $t \in \mathbb{Z}$. Přičemž lze ukázat, že čísla x a y jsou nesoudělná, x_0 není násobkem b a y_0 není násobkem a .

Lemma 2

Nechť je dán nekmenný zlomek $0 < \frac{a}{b} < 1$; $a, b \in \mathbb{N}$ v základním tvaru, pak existují čísla $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ taková, že $a \cdot b_1 = 1 + b \cdot a_1$ s vlastnostmi $0 < b_1 < b$; $0 < a_1 < \min(a, b_1)$.

Důkaz

Podle lemma 1 existují celá čísla x, y vyhovující rovnici $a \cdot x + b \cdot y = 1$ a jedno konkrétní řešení $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Za podmínky $0 < x < b$ musí platit $0 < x_0 - b \cdot t < b$; $t \in \mathbb{Z}$, kde x_0 není násobkem b (viz. výše). Těmto podmínkám vyhovuje právě jedno t (existuje tedy $0 < b_1 = x_0 - b \cdot t < b$). Rovnice upravíme na tvar $a \cdot b_1 + b \cdot y = 1 \Rightarrow -b \cdot y = a \cdot b_1 - 1$.

$$\Rightarrow -y = \frac{a}{b} \cdot b_1 - \frac{1}{b} < \frac{a}{b} \cdot b_1 < b_1$$

$$\Rightarrow -y = \frac{a}{b} \cdot b_1 - \frac{1}{b} < \frac{a}{b} \cdot b_1 < \frac{a}{b} \cdot b < a$$

$\Rightarrow y = -\frac{a}{b} \cdot b_1 + \frac{1}{b} = \frac{1 - a \cdot b_1}{b}$, pokud $\frac{a}{b}$ je nekmenný zlomek a $0 < b_1 < b$, je součin $a \cdot b_1$ větší než 1. $\Rightarrow y < 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow 0 < a_1 = -y < \min(a, b_1)$, našli jsme i hodnotu přirozeného čísla a_1 . Důkaz je hotov.

Nyní pro racionální číslo $0 < \frac{a}{b} < 1$; $a, b \in \mathbb{N}$, podle lemma 2 najdeme přirozená čísla a_1 a b_1 s danými vlastnostmi: $a \cdot b_1 = 1 + b \cdot a_1$; $0 < b_1 < b$; $0 < a_1 < \min(a, b_1)$.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot b_1}{b \cdot b_1} = \frac{1 + b \cdot a_1}{b \cdot b_1} = \frac{1}{b \cdot b_1} + \frac{a_1}{b_1}$$

$$a_1 \neq 1 \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{b \cdot b_1} + \frac{1}{b_1 \cdot b_2} + \frac{a_2}{b_2}$$

Pokud se $a_1 \neq 1$, můžeme postup opakovat, jinak je rozklad na kmenné zlomky hotov. Při pokračování dostaneme posloupnosti $1 \leq a_r < a_{r-1} < \dots < a_1 < a$ a $1 < b_r < b_{r-1} < \dots < b_1 < b$ o $r < a$ prvcích. Jmenovatelé takových kmenných zlomků tvoří klesající posloupnost. $b \cdot b_1 > b_1 \cdot b_2 > \dots > b_{r-1} \cdot b_r > b_r$, proto jsou jednotlivé kmenné zlomky různé.

Věta 5

Každé racionální číslo v základním tvaru $0 < \frac{a}{b} < 1$; $a, b \in \mathbb{N}$ lze vyjádřit pomocí Golombova algoritmu maximálně a vzájemně různými kmennými zlomky. Jmenovatelé kmenných zlomků tohoto rozkladu jsou menší nebo rovné výrazu $b \cdot (b-1)$.

Důkaz

Důkaz plyne z lemma 2 a vlastností Golombova algoritmu uvedených výše. Posloupnost $a_j > 0$ je klesající, tudíž takových hodnot může být jen a . Stejně klesající je i posloupnost jmenovatelů. Největší $b \cdot b_1 \leq b \cdot (b-1)$, protože $b_1 < b$.

Příklad 5

Vyjádřete zlomek $\frac{3}{7}$ pomocí Golombova algoritmu.

Hledejme $0 < b_1 < 7$, $0 < a_1 < 3$ vyhovující rovnici $3 \cdot b_1 = 1 + 7 \cdot a_1$.

$$a_1 = 2; b_1 = 5;$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1 + 7 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{1}{35} + \frac{2}{5}$$

Hledejme $0 < b_2 < 5$, $0 < a_2 = 1 < 2$ vyhovující rovnici $2 \cdot b_2 = 1 + 5 \cdot 1$.

$$a_2 = 1; b_2 = 3;$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$

Výsledný rozklad je: $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{1}{3} \frac{1}{15} \frac{1}{35}$.

2.4. Erdősův algoritmus

Jeden z nejhezčích postupů uveřejnil roku 1950 P. Erdős. Pomocí něho dokázal, že každé racionální číslo $0 < \frac{a}{b} < 1$; $a, b \in \mathbb{N}$ lze zapsat nejvýše $\frac{8 \ln b}{\ln \ln b}$ různými kmennými zlomky s jmenovatelem nejvýše hodnoty $\frac{4b^2 \ln b}{\ln \ln b}$.

Věta 6

Nechť p a q jsou přirozená čísla, pro která platí nerovnost $p < q!$, pak číslo p lze zapsat jako součet maximálně q různých dělitelů čísla $q!$.

Důkaz

Tento důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. krok – výrok platí pro $q = 2$.

Přirozené číslo menší než $2!$ je pouze jednička a ta sama je dělitelem $2!$.

2. krok – Předpokládejme platnost pro $q = k - 1$.

3. krok – Pokusíme se dokázat platnost pro $q = k$.

Zapíšeme číslo p ve tvaru $p = k \cdot n + z$; $n \in \mathbb{N}_0$; $z \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$

$\Rightarrow k \cdot n < p < k! \Rightarrow n < (k-1)!$. Podle 2. kroku je číslo $n = \sum_{i=1}^r d_i$; $r \leq k-1$; $d_j = d_i \Rightarrow j = i$; kde d_i jsou dělitelé $(k-1)!$ $\Rightarrow p = k \sum_{i=1}^r d_i + z = \sum_{i=1}^r k \cdot d_i + z \Rightarrow k \cdot d_i$ jsou dělitelé $k!$ větší než $k-1 \geq z$. $\Rightarrow p = \sum_{i=1}^{r+1} d_i^*$; $r+1 \leq k$; $d_j = d_i \Rightarrow j = i$; kde d_i^* jsou dělitelé $k!$. Důkaz je hotov.

Na této větě je postaven celý algoritmus. Pro každé racionální číslo $0 < \frac{a}{b} < 1$; $a, b \in \mathbb{N}$ lze najít právě jedno $n \in \mathbb{N}$ s vlastností $(n-1)! \leq b < n!$. Podobně nalezneme $z \in \mathbb{N}$ splňující nerovnost $z \leq \frac{a \cdot n!}{b} < z+1$.

$\Rightarrow \frac{z}{n!} \leq \frac{a}{b} < \frac{z+1}{n!}$. Podle věty 6 lze číslo z zapsat součtem různých dělitelů $n!$. Z těchto nerovností dále dostaneme: $z \cdot b \leq a \cdot n! < z \cdot b + b \Rightarrow 0 \leq a \cdot n! - z \cdot b < b < n!$. Proto i hodnotu $a \cdot n! - z \cdot b$ lze vyjádřit jako součet různých dělitelů $n!$.

$$z = \sum_{i=1}^r d_i; 1 \leq r \leq n$$

$$a \cdot n! - z \cdot b = \sum_{i=1}^s d_i^*; 0 \leq s \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n! - z \cdot b + z \cdot b}{b \cdot n!} = \frac{z}{n!} + \frac{a \cdot n! - z \cdot b}{n! \cdot b} = \frac{\sum_{i=1}^r d_i}{n!} + \frac{\sum_{i=1}^s d_i^*}{n! \cdot b}.$$

d_i i d_i^* jsou dělitelé $n!$, proto $\frac{\sum_{i=1}^r d_i}{n!} + \frac{\sum_{i=1}^s d_i^*}{n! \cdot b}$ představuje součet kmenných zlomků.

$$\frac{\sum_{i=1}^r d_i}{n!} + \frac{\sum_{i=1}^s d_i^*}{n! \cdot b} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{u_i} + \sum_{i=1}^s \frac{1}{u_i^*}$$

Dokažme, že jsou tyto kmenné zlomky vzájemně různé. Protože d_i jsou vzájemně různé a d_i^*

také, shoda kmenných zlomků by byla možná jen pro nějakou dvojici $u_v = u_w^* \Rightarrow \frac{d_v}{n!} = \frac{d_w^*}{n! \cdot b}$

$\Rightarrow b \cdot d_v = d_w^* \geq b$, to je ale ve sporu s nerovností $d_w^* \leq \sum_{i=1}^s d_i^* = a \cdot n! - b \cdot z < b$. Dostali jsme se ke sporu, tudíž všechny kmenné zlomky získané tímto postupem jsou vzájemně různé. Potvrdili jsme správnost algoritmu.

Příklad 6

Vyjádřete zlomek $\frac{3}{7}$ pomocí Erdősova algoritmu.

$$3! \leq 7 < 4! \Rightarrow n = 4;$$

$$\frac{z}{4!} \leq \frac{3}{7} < \frac{z+1}{4!} \Rightarrow z \leq \frac{72}{7} \wedge z > \frac{72}{7} - 1 \Rightarrow z = 10;$$

$$\frac{3}{7} = \frac{10}{4!} + \frac{3 \cdot 4! - 7 \cdot 10}{4! \cdot 7} = \frac{8+2}{24} + \frac{2}{168} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84} = \frac{1}{3} \frac{1}{12} \frac{1}{84}.$$

3. Operace se zlomky

Ukázali jsme si čtyři různé postupy nalezení zápisu racionálního čísla ve tvaru egyptského zlomku. Někdy mohou vést ke stejnému výsledku, jindy dostaneme různé rozklady. To znamená, že rozklad není jednoznačný a existuje mnoho variant rozkladu. Na podporu tohoto tvrzení si můžeme ukázat i aplikaci rovností:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{6x},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x \cdot (x+1)}.$$

Pokud seřadíme zlomky podle velikostí a ten nejmenší nahradíme rozkladem podle výše uvedených rovností, dostaneme nový rozklad, kdy nové zlomky jsou menší než nahrazený zlomek. Takový zápis opět splňuje definici egyptského zlomku.

Příklad 7

Pomocí uvedených rovností nalezněte další zápisy egyptského zlomku $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{12} \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{20}.$$

3.1. Základní tvar a porovnávání zlomků

U racionálních čísel jsme zvyklí na mnoho tvarů zápisu racionálního čísla, ale máme zaveden jednoduchý základní tvar, na který lze každý zlomek upravit. V tvaru egyptského zlomku takový základní tvar (zápis) neexistuje. Jako alternativu, můžeme uvést tvar získaný hladovým algoritmem. Algoritmus je jednoznačný a dá se zjistit, zda daný tvar tímto algoritmem vznikl.

Seřadíme kmenné zlomky sestupně podle velikosti. Pokud v zápisu je zlomek $\frac{1}{u_i}$, pak součet

menších zlomků včetně něho musí být menší než $\frac{1}{u_i - 1}$, jinak nebyl vybrán ten největší

kmenný zlomek dle algoritmu. Pokud toto platí pro všechny kmenné zlomky v zápisu, je tento tvar vzniklý hladovým algoritmem a můžeme ho považovat za základní tvar egyptského zlomku.

Příklad 8

Určete zda egyptské zlomky jsou zapsány Fibonacci–Sylvesterovým algoritmem.

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{660} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{15} \frac{1}{660}$$

$$\frac{1}{659} > \frac{1}{660}$$

$$\frac{1}{14} > \frac{1}{15} + \frac{1}{660} = \frac{3}{44}$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{660} = \frac{7}{22}$$

$$1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{660} = \frac{9}{11}$$

V příkladě a) je zápis výsledkem hladového algoritmu.

$$\text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66} = \frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{22} \frac{1}{66}$$

$$\frac{1}{65} > \frac{1}{66}$$

$$\frac{1}{21} < \frac{1}{22} + \frac{1}{66} = \frac{2}{33}$$

V příkladě b) není zápis výsledkem hladového algoritmu.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66} = \frac{33+11+3+1}{66} = \frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{5}{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{110} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{37} + \frac{1}{4070}.$$

Vlastnosti zápisu egyptského zlomku z hladového algoritmu také umožňují rychlé porovnání velikostí zlomků. Pokud opět kmenné zlomky v takovém zápisu seřadíme sestupně, už při prvním rozdílu kmenných zlomků můžeme říct, které číslo je větší. Pokud se totiž do zbytku zlomku vejde největší jiný kmenný zlomek, lze rozhodnout, který součet zlomků je větší.

Příklad 9

Které z čísel $\frac{7}{8}$ a $\frac{8}{9}$ je větší?

Vytvoříme zápisy těchto zlomků hladovým algoritmem.

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}; \quad \frac{8}{9} = \frac{1}{2} + \frac{7}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}.$$

Rozdíl je v posledním zlomku $\frac{1}{24} < \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

Příklad 10

Které z čísel $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{15}$ a $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{36}$ v základním tvaru egyptského zlomku je větší?

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{15} > \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{36}.$$

Pokud není zlomek zapsán v základním tvaru, je vhodnější oba zlomky vyjádřit jako násobky společného dělitele. Tento postup nejspíše používali i Egypťané.

Příklad 11

Které z čísel $\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{15}$ a $\frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{8}$ je větší?

Oba zlomky můžeme vyjádřit jako násobky $\frac{1}{120}$.

$$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{15} = (60 + 20 + 8) \cdot \frac{1}{120} = 88 \cdot \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{8} = (60 + 24 + 15) \cdot \frac{1}{120} = 99 \cdot \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{15} < \frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{8}$$

Takto asi dělili zlomky i egyptští písaři (mohli ale použít i násobky zlomku $\frac{1}{15}$, nebo $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{60}$).

3.2. Sčítání a odčítání zlomků

Postup sčítání egyptských zlomků velmi přesně popisuje H. Vymazalová:

*Sčítání zlomků se provádělo převedením na společného jmenovatele. Oproti dnešnímu postupu však v egyptských výpočtech za společného jmenovatele nemusel být zvolen nejmenší společný násobek, takže hodnoty odpovídající čitatelům mohly mít i podobu zlomku. Hodnota čitatele se připsala červeným inkoustem pod každý zlomek ve výpočtu, přičemž zvolený společný jmenovatel měl hodnotu 1. Tato červená čísla jasně zachycovala vztah toho kterého zlomku k ostatním hodnotám ve výpočtu...*⁸

Pro výuku bych doporučil použít společný jmenovatel všech kmenných zlomků. Ve skutečnosti to ale znamená vše převést na jeden zlomek a ten zpátky na egyptský zlomek. Tuto metodu lze uplatnit pro sčítání i odčítání. Navíc je tento postup univerzální.

Egypťané nejspíš ale vycházeli i ze zkušeností a pokud všechny sčítané kmenné zlomky byly různé, nechali součet v daném tvaru. Jestli se vyskytly stejné zlomky, použili tabulky $2/n$, například tu uvedenou v Rhindově papyru, nebo na Koženém svitku. I takový postup je konečný, pokud si dané zlomky seřadíme a úpravy provádíme od největších a ž po ty nejmenší.

⁸ VYMAZALOVÁ, Hana. *Staroegyptská matematika: hieratické matematické texty*. Vyd. 1. Praha: Český egyptologický ústav, 2006, 155 s. Dějiny matematiky (Český egyptologický ústav), sv. 31. ISBN 80-730-8156-3. strana 27.

Kvalita písaře se prokázala jeho znalostí převodních tabulek a schopností zapsat výsledek co nejjednodušeji.

Příklad 12

Sečtěte zlomky a) $\frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{3} \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{2} \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{7}$.

$$\text{a) } \frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 \frac{1}{4} \frac{1}{8}; \text{ nebo v základním tvaru } \frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{8} = 1 \frac{1}{3} \frac{1}{24}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{3} \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \frac{1}{9} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{15+10+6}{90} = \frac{1}{2} + \frac{30+1}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{90} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{90} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{6+4+3}{12} + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{28} = 1 \frac{1}{3} \frac{1}{28}$$

Při odčítání tento zjednodušený postup nelze obecně použít. Je vhodné odečíst stejné zlomky a zbytek převést na společného dělitele.

Příklad 13

Zapište rozdíl ve tvaru egyptského zlomku. a) $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{42}$ b) $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{9}$.

$$\text{a) } \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{42} = \frac{1}{24} - \frac{1}{42} = \frac{7-4}{168} = \frac{1}{56}.$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{9} = \frac{36+18+9-(24+12+8)}{72} = \frac{19}{72} = \frac{18+1}{72} = \frac{1}{4} + \frac{1}{72} = \frac{1}{4} \frac{1}{72}.$$

Příklad 14 – Úloha z Rhindova papyru

R21: $\frac{2}{3} \frac{1}{15}$ doplňte do 1.

$$1 - \left(\frac{2}{3} \frac{1}{15} \right) = (15 - 10 - 1) \cdot \frac{1}{15} = 4 \cdot \frac{1}{15} = (3 + 1) \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5} \frac{1}{15}$$

$$\text{Zkouška: } \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{10+3+1+1}{15} = 1$$

Skutečný zápis na papyru vypadal takto:

Řekne se ti: co doplní $\frac{2}{3} \frac{1}{15}$ do 1?

10 1 celkem 11 zbytek 4

(zde si zvolili za společného jmenovatele 15 a čísla pod zlomky vyjádřili kolik patnáctin zlomek vyjadřuje).

Počítej s 15, až najdeš 4.

$$1 \quad 15 \quad \frac{1}{10} \quad 1\frac{1}{2} \quad \sqrt{\frac{1}{5}} \quad 3 \quad \sqrt{\frac{1}{15}} \quad 1 \quad \text{Celkem 4.}$$

Tedy $\frac{1}{5}\frac{1}{15}$ se k tomu přičtou.

Metoda zkoušky:

Doplň se

$$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{15} \quad \text{k 1.}$$

$$10 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad \text{celkem 15.}$$

Jiné $\frac{1}{6}\frac{1}{10}$ se přičtou.

Egyptané byli zvyklí výsledek ověřit. To samo svědčí o systematickosti a zavedených pravidlech pro řešení příkladů. Jiný výsledek není popsán, ale při převedení na šedesátiny je tento výsledek předvídatelný.

3.3. *Násobení a dělení*

Násobení probíhalo podle pravidel v kapitole 1.2.2. Skupina zlomků jednoho součinitele se vynásobila jednotlivými kmennými zlomky druhého. Egyptský způsob násobení byl pro to ideální. Výsledné zlomky se potom sečetli. Egyptanům tento postup umožňoval zacházet se zlomky stejně jako s celými čísly. Pro současné studenty je naše násobení přeci jenom přehlednější.

Příklad 15 – Úloha z Rhindova papyru

R7: Vypočítejte součin zlomků $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}\frac{1}{28}$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \frac{1}{112} = \\ &= (28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1) \cdot \frac{1}{112} = \frac{56}{112} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nebo:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \frac{1}{112} = \\ &= \frac{1}{28} \left(7 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Skutečný zápis na papyru vypadal takto:

Metoda doplňování

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{28} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{56} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{112} \\
 & 7 & 1 & & 3\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & 1\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \text{Celkem } \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.
 \end{array}$$

Egyptané zvolili za společného jmenovatele 28. V prvním řádku jsou dané násobky a v druhém nalezneme kolika kmenným zlomkům s jmenovatelem 28 daný násobek odpovídá.

Všimněte si, že lze jednoduše dopočítat vyjádření násobku daného zlomku v $\frac{1}{28}$ (je uvede pod zlomkem). Například 8 se vejde do 28 právě $3\frac{1}{2}$.

Dělení v kapitole 1.2.2 bylo popsáno jako inverzní postup k násobení. Egyptané hledali násobky dělitele, které daly dohromady dělenec. Možná mnohé napadne, proč v Příklad 15 zvolili společného jmenovatele 28, ale pokud se na příklad podíváme z pohledu učitele, který chce dostat hezký výsledek $\frac{1}{2}$ při vynásobení čísla $\frac{1}{4} \frac{1}{28}$, začneme dělením, a potom se 28 nabízí jako logický dělitel.

Příklad 16

Vydělte číslo $\frac{1}{2}$ číslem $\frac{1}{4} \frac{1}{28}$.

Společný jmenovatel je 28. $\frac{1}{2}$ odpovídá $14\frac{1}{28}$, číslo $\frac{1}{4} \frac{1}{28}$ představuje $8\frac{1}{28}$. Přepišme tyto hodnoty podle zvyklostí Egyptanů.

$$\begin{array}{lll}
 \backslash 1 & \frac{1}{4} \frac{1}{28} & 7 + 1 = 8 \\
 \backslash \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \frac{1}{56} & 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \\
 \backslash \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \frac{1}{112} & 1\frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2
 \end{array}$$

Výsledek je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} \frac{1}{4}$. Zkouškou je Příklad 15. Vidíte, že vizuálně je tento zápis podobný násobení.

Dělení je součástí úloh o kvalitě chleba a piva, nebo výpočtů množství měřic na jeden chleba. Dá se využít i v dalších jednoduchých slovních úlohách, které se řeší v Rhindově papyru.

Příklad 17 – Úloha z Rhindova papyru

R34: Množství, jehož $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ k němu přidané dají 10. (Určete číslo, ke kterému když přičtete jeho $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ dostanete 10.)

Zde řešíme rovnici $x + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4}\right)x = 10 \Rightarrow x \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}\right) = 10 \Rightarrow x = 10 : \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}\right)$.

$$\backslash 1 \quad 1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \quad 7$$

$$2 \quad 3 \frac{1}{2}$$

$$\backslash 4 \quad 7 \quad 28$$

Čtyřnásobek a dvojnásobek dají víc jak deset, proto vybereme čtyřnásobek a jednonásobek.

Do deseti chybí $5 \cdot \frac{1}{4}$, vybrané násobky představují $35 \cdot \frac{1}{4}$. Jednonásobek představuje $7 \cdot \frac{1}{4}$.

Jedna čtvrtina je tedy $\frac{1}{7}$ dělitele.

$$\backslash \frac{1}{7} \quad \frac{1}{4} \quad 1$$

$$\frac{1}{4} \frac{1}{28} \quad \frac{1}{2}$$

$$\backslash \frac{1}{2} \frac{1}{14} \quad 1 \quad 4$$

Výsledek je $5 \frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{1}{14}$.

Metoda zkoušky:

$$\backslash 1 \quad 5 \frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{1}{14} \quad \backslash \frac{1}{2} \quad 2 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{14} \frac{1}{28} \quad \backslash \frac{1}{4} \quad 1 \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{28} \frac{1}{56}$$

Celkem $9 \frac{1}{2} \frac{1}{8}$ a zbytek $\left(\frac{1}{7} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{56}\right) = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \Rightarrow 10$.

$$8 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 1 = 14 \quad 7 \quad \text{celkem } 21.$$

Vidíme, že i dělení mělo svůj postup a logický řád. Volba společného jmenovatele a podílových zlomků není náhodná. Dopočítáme kolik chybí zlomků společného jmenovatele a pak si

určíme, kolik těchto zlomků je v děliteli. Z převrácené hodnoty tohoto počtu získáme jeden chybějící zlomek a hledáme už jen jeho potřebné násobky.

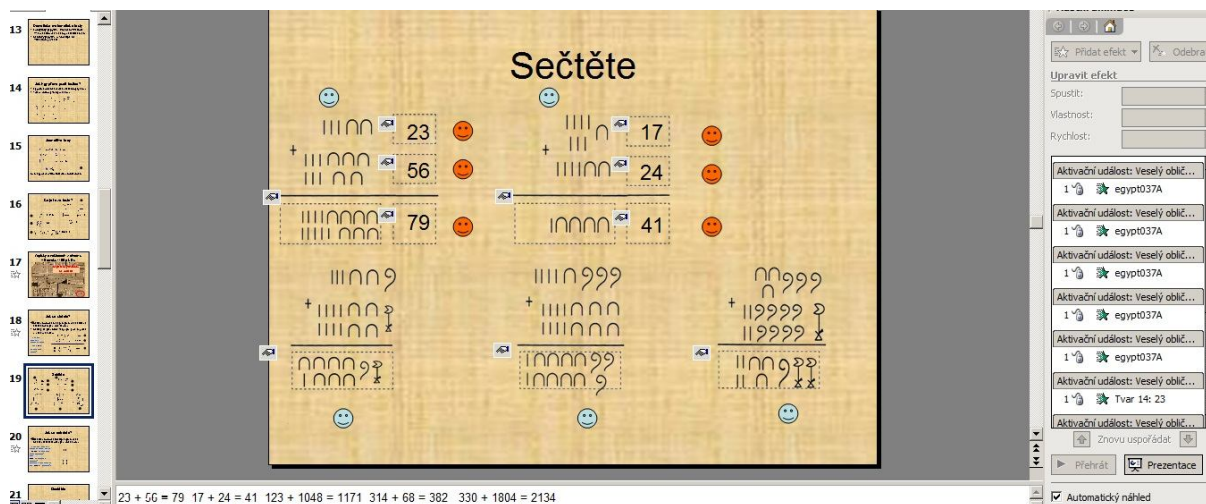
Sice jsme poodhalili, jak počítali Egypťané, ale naše současné symbolické metody mají nárůzdíl od tohoto postupu řadu výhod. Stále je však co obdivovat na dovednostech starých písařů, kteří většinu výpočtů dělali z paměti a v tomto postupu se neztratili.

4. Výukový materiál

Téma egyptských zlomků je zajímavé, a proto se dá využít i ve výuce. Můžeme ho uplatnit v projektových dnech o starověkých říších, nebo jen v matematickém semináři. Zahrajeme si s nimi na písáře z Egyptské říše, nebo se staneme průvodci odhalování tajemství úloh na starých papyrech. Zásadním úkolem je motivace žáků a jejich zaměstnání aktivní činností. egyptské zlomky lze použít i na procvičování práce se zlomky. V takovém případě se zaměříme jen na vytvoření zápisu egyptských zlomků a operace se zlomky v tomto tvaru.

4.1. Prezentace a pracovní listy

Prezentace a pracovní listy jsou moderními prostředky na podporu výuky. Prezentace slouží jen jako podpora výuky. Současné děti projekci pasivně sledují a nejsou zvyklé při této činnosti přemýšlet a pracovat, proto jsem k prezentaci vytvořil pracovní listy, které nutí žáky k pozornosti a aktivní činnosti. Pokud studenti píší, odpovídají na kladené otázky, využívají znalosti v příkladech, vysvětlují své poznatky ostatním a zapojují své myšlení všemi smysly, pak si lépe danou látku pamatují a vytvářejí větší myšlenkovou síť spojenou s danými informacemi. Pracovní listy jsou tedy provázané s prezentací. Výjimkou je první motivační úloha na pracovním listě 1. části, kde můžete děti zapojit do diskuze, co vědí o starém Egyptě a zbytek informací doplní v průběhu hodiny.

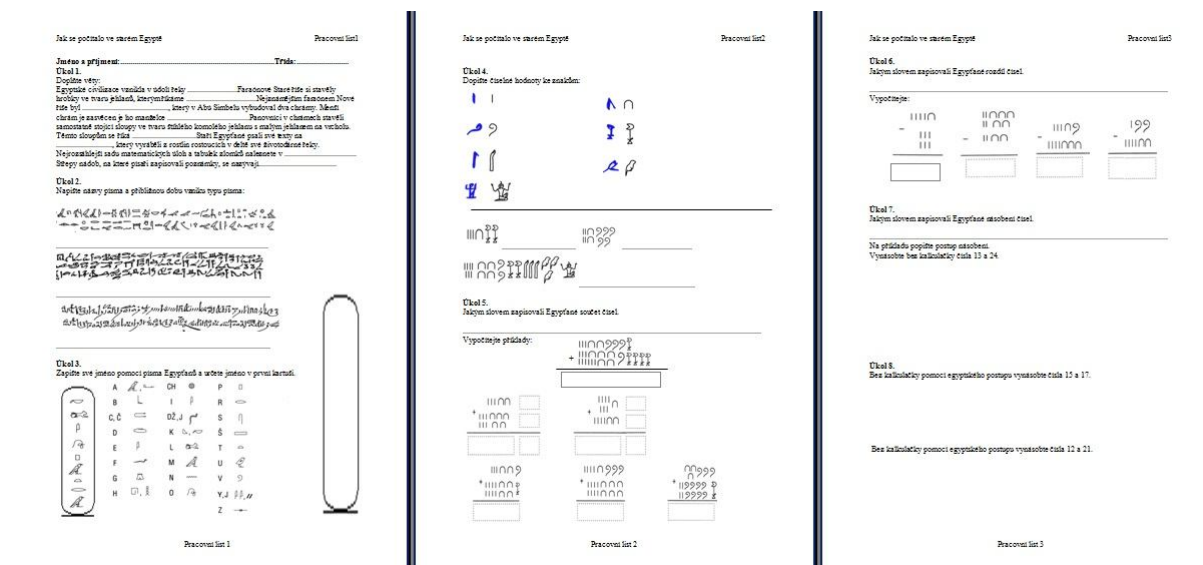


Obrázek 13 – Náhled dynamického snímku se skrytým textem

V prezentaci je značné množství skrytého textu, který odhalíte kliknutím na symboly smajlíků. V průběhu výuky není nutné pospíchat s odhalováním těchto textů a výsledků. Lepší je k projektoru použít běžnou, nebo i interaktivní tabuli pro zápis studentů a jejich řešení. Protože příkladů je velké množství. Ještě před začátkem hodiny si vyberte úlohy, které uděláte se žáky a zbytek uložte za domácí úkol. Při kontrole úkolu můžete zobrazit řešení z prezentace.

První sadu tvoří soubory „JakPočítaliVeStarémEg1C.ppt“ a „PracovníListyEg1C.doc“. Konceptce tohoto materiálu je na jednu vyučovací hodinu. Je to jednoduchý úvod do tématu. Žáci se naučí rozpoznávat písmo starověkého Egypta, zapisovat čísla v hieroglyfech, sčítat a odčítat.

tat čísla v této podobě a prozkoumat egyptský algoritmus násobení a dělení. Protože se jedná o základní operace, žáci by měli pracovat bez kalkulaček.



Obrázek 14 – Náhled pracovních listů

- Snímky 1–4** Slouží k motivačnímu úvodu do tématu, můžete se studenty rozvést diskuzi na téma, co znají ze staroegyptské civilizace.
- Úkol 1** na pracovním listě. K tomuto úkolu by se žáci měli vracet. Informace pro tento úkol budou sbírat po celou hodinu, zbytek mohou dohledat za domácí úkol.
- Snímky 5–8** Přehled užívaných písem ve starověkém Egyptě. Žáci zde mohou zapsat své jméno pomocí hieroglyfů; úkol 2 a 3.
- Snímky 9–13** Přehled dochovaných staroegyptských textů. Zde je vhodné zastavit se nad pojmem ostrakon. Smajlíky odkazují na snímky s ukázkami těchto textů. Pro návrat z ukázek je nutné použít tlačítko návratu:
- Snímky 14–17** Popis zápisu čísel v hieroglyfech; úkol 4.
- Snímky 18–21** Sčítání a odčítání v hieroglyfickém zápisu. Červené smajlíky zobrazují arabský zápis čísel, modré zviditelní hieroglyfický zápis; úkol 5–6.
- Snímky 22–27** Popis algoritmu násobení a dělení. Všechny příklady jsou na stránce fázované s celým postupem. Pokud chcete animaci postupu přeskočit, použijte tlačítko další: ; úkol 7, 8, 9 a 10.

Druhou sadu tvoří soubory „JakPočítaliVeStarémEg2C.ppt“ a „PracovníListyEg2C.doc“. Koncepce tohoto materiálu je na pět vyučovacích hodin. Protože se jedná o základní operace a procvičování dovedností při práci se zlomky, měli by žáci pracovat bez kalkulaček.

1. hodina

- Snímky 1–12** Motivační blok. Důležitým pojmem jsou kmenné zlomky; úkol 11 až 14.

- Snímek 13 Úloha s kameníky, můžete studentům napovědět přepisem zlomku na sedmdesátiny a zeptat se, zda se do zlomku vejde jedna polovina; úkol 15.
- Snímek 14–16 Tato část je návodem na hladový algoritmus. Hledání největšího kmeného zlomku. Nepospíchejte a nechte děti vymýšlet postupy pro první část úkolu 16.

2. hodina

- Snímky 17–20 Důkaz rozkladu zlomků $2/n$. druhá část úkolu 16.
- Snímek 21–26 Důkaz rozkladu zlomků $3/n$. třetí část úkolu 16. Tuto část můžete vynechat, pokud máte slabší skupinu.
- Snímek 27–35 Zbytek důkazu hladového algoritmu matematickou indukcí. Diskuze nad mnoha způsoby zápisu egyptského zlomku; úkol 17 a 18.

3. hodina

- Snímky 36–48 Definování základního tvaru egyptského zlomku a jeho ověření. Porovnávání zlomků; úkol 19 až 24.

4. hodina

- Snímky 49–56 Postupy sčítání a odčítání; úkol 25 až 28.
- Snímky 57–59 Násobení celým číslem, násobení; úkol 29.

5. hodina

- Snímky 60–68 Postupy násobení a dělení; úkol 30 až 32.
- Snímky 69–76 Úlohy na dělení; úkol 33 a 34.
- Snímek 77–81 Binární rozklad, náznak na základě geometrické posloupnosti; úkol 35.

Příkladů je v této části velmi mnoho, proto nepočítejte s žáky všechny. Nechte studenty některé úlohy dopracovat za domácí úkol. Pokud budete chtít vše počítat při hodině, bude výuka minimálně o jednu až dvě vyučovací hodinu delší. Obě části jsou na přiloženém CD.

4.2. Moodle kurz

Moderním trendem při výuce je využití LMS portálů. Jeden z nejrozšířenějších portálů je Moodle. Jedná se o Open Source projekt, který je školám dostupný a na jeho vývoji se podílí i čeští vývojáři. Vytvořený kurz je ve verzi 2.4. Napojením na školní síť s přihlašovací systémem získávají studenti portál, kde najdou veškeré učební materiály přístupné z libovolného webového prohlížeče. Stejně výhody poskytuje i vyučujícím, kde mohou studentům poskytnout materiály, hodnotit jejich práci a testovat je. Využité nástroje jsou rozděleny do dvou částí. První tvoří studijní materiály (odkazy na soubory prezentací, pracovních listů, historických přehledů, modul kniha, modul přednáška a internetové odkazy na výpočty egyptských zlomků). Druhou částí jsou aktivity pro studenty (přednáška ve formě „Flash Card“, slovníček

s úkolem na doplňování pojmů k tématu, místo na odevzdání pracovních listů v elektronické podobě, test).

Kurz je dostupný na adrese <https://www.pslib.cz/moodle24/course/view.php?id=8>. Přihlásit se jako učitel můžete na uživatelské jméno „teacher“ s heslem „M+oo19dler72“.

O počítání v Egyptě

V tomto kurzu si ukážeme, jak Egypťané počítali se zlomky a jak s nimi pracovali.

Je zde pro vás připravena sada pracovních listů s příklady, které se učili starověcí písaři z takzvaného Rhindova matematického papýru.



Studijní materiál



- Egyptská čísla a počítání
- Matematické papýry
- Prezentace 1 – Egyptská čísla
- Pracovní listy – část 1.
- Prezentace 2 - Egyptské zlomky
- Pracovní listy – část 2.

Další materiály:

- Egyptské zlomky v programu MATHEMATICA 1
- Egyptské zlomky v programu MATHEMATICA 2
- Vlastnosti Egyptských zlomků - anglický text
- Jména faraonů a kartuše
- Přehled dějin Starověkého Egypta
- Hezký odkaz na stránky o historii Egypta

Činnosti



- Horovo oko
- Doplňte slovníček o nové pojmy
- Odevzdání pracovního listu - část 1.
- Odevzdání pracovního listu - část 2.
- Test



Obrázek 15 – Ukázka kurzu

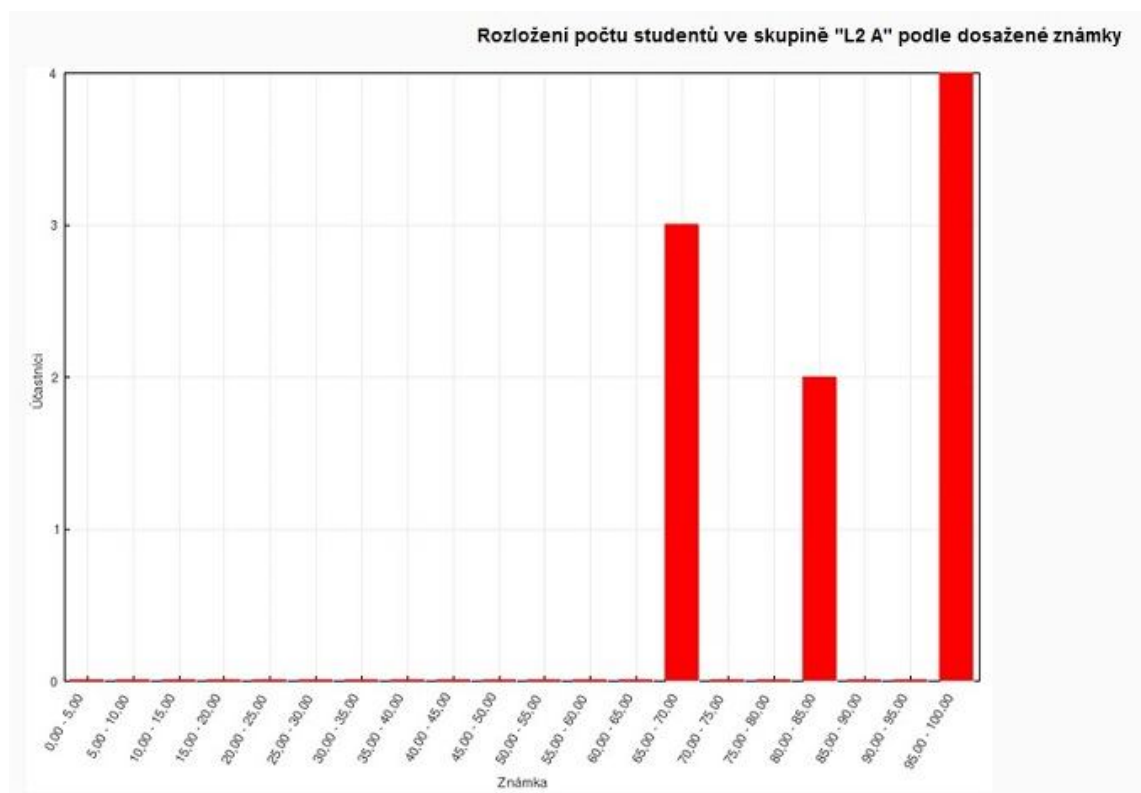
Přednáška „Egyptské čísla a počítání“ je interaktivní variantou „Prezentace 1 – Egyptská čísla“ (první prezentace z kapitoly 4.2). Je vhodná pro samostudium, nebo pro zopakování prvního výukového bloku z kapitoly 4.2. Modul Kniha s názvem „Matematické papýry“ je přehledem matematických textů starého Egypta. Všechny použité citace v tomto přehledu jsou řádně označeny. Prezentace a pracovní listy jsou popsány v předchozí kapitole. Internetové odkazy v části „Další materiály“ představují převážně anglicky psané texty a aplikace. Texty nejsou náročné, proto studenti, kteří se učí na střední škole anglický jazyk, by měli umět tyto odkazy efektivně využít. České odkazy jsou jen historické a pomáhají žákům zařadit informace do historických souvislostí.

Blok činností začíná přednáškou typu „Flash Card“, ta pomáhá k upevnění pojmů a zlomků definovaných symbolem vedžat. Otevřený slovník „Doplňte slovníček o nové pojmy“, vede žáky k aktivitě zapsání tématického pojmu podle výběru. Je to tvořivá práce a výsledkem je materiál, který lze dále použít. Další odkazy jsou jen místem na elektronické odevzdání pracovních listů. Pokud se ale jedná o žáky vaší školy, preferujte osobní odevzdání rukou doplněných pracovních listů. Úkoly na pracovních listech pomáhají udržovat pozornost a zápis úloh upevňuje zapamatování si nových dovedností. Na LMS portálu můžete nastavit jen datum odevzdání. Poslední činností je test. Test v elektronické podobě neumožňuje hodnotit postupy, proto jsou jednotlivé úlohy zaměřené na dopočítávání a porovnávání v zápisu egyptských zlomků. Test nepochvíčuje operace s egyptskými zlomky, ale jen jejich zápis. Pokud chcete otestovat postupy, vytvořte jednoduchý úkol na odevzdání příkladu v časovém omezení. Nevýhodou elektronického testu je, že žáci mohou využít aplikace kalkulačky, tabulkového procesoru a výpočetního softwaru (program MATHEMATICA), který mají na pracovních stanicích. Při testu neměli žáci zpřístupněné výukové prezentace. Výsledný kurz je na příloženém CD.

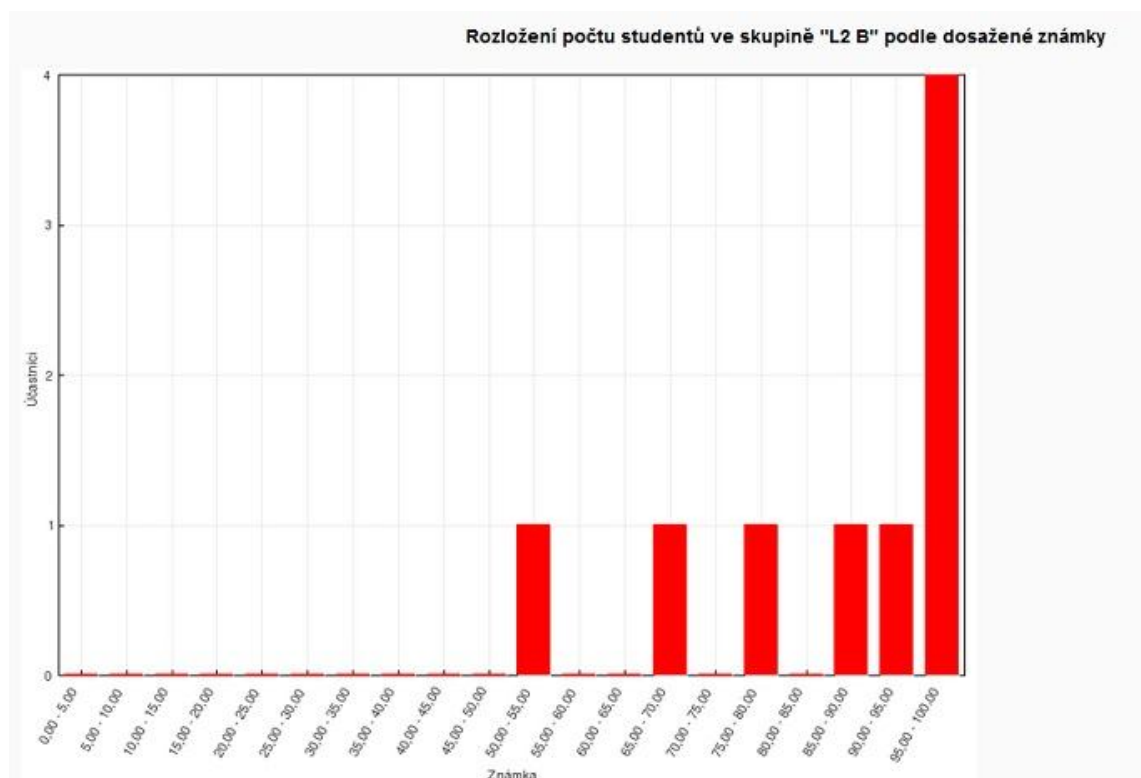
4.3. Odzkoušení ve třídách

Tento modul byl odzkoušen na dvou skupinách třídy L2 v předmětu „Seminář z matematiky“. Po první skupině jsem prezentace a pracovní listy upravil, odstranil jsem nevhodné příklady, opravil nevhodné úlohy v testu. První skupina byla rychlá a celý blok zvládla v plánovaném čase šesti hodin. Tito studenti sami přišli na zefektivnění postupu násobení násobky deseti a hladový algoritmus se naučili velmi rychle používat. Druhá skupina byla pomalejší, celý blok zvládla za sedm vyučovacích hodin. Protože se jednalo o druhý ročník, vynechal jsem v obou skupinách binární algoritmus. Zajímavé bylo srovnání výsledků z testů. Obě skupiny dopadly podobně. Z první skupiny (L2 A – 11 žáků) psalo test devět studentů. Čtyři dosáhli maximálního počtu bodů, dva získali 85 % bodů a tři 70 %. Z tohoto pohledu se zdá, že test byl jednoduchý. Škálu známkování bych navrhoval v horních šedesáti procentech s rozdělením po 10 % a nastavit časové omezení testu na 25 minut na šest úloh. (0 % až 60 % nedostatečně, 60,1 % až 70 % dostatečně, 70,1 % až 80 % dobře, 80,1 % až 90 % chvalitebně, zbytek výborně). Z druhé skupiny (L2 – 12 žáků) psalo test také devět studentů. Výsledky opět byly rozložené v rozsahu 50 % až 100 %. I s danou škálou jsou výsledky nadprůměrné. Je to důsledek toho, že studenti mohou na počítači využít integrovanou kalkulačku, nebo nainstalova-

né programy. Doporučil bych test vytisknout a vyzkoušet v písemné podobě. Jeho součástí tak bude i práce se zlomky a počítání z paměti. Počítač zde není vhodným nástrojem.



Graf 1 – Výsledky skupiny L2 – A



Graf 2 – Výsledky skupiny L2 – B

Při zvoleném rozvržení dostaneme výsledky zapsané v následující tabulce.

Skupina\Známka	1	2	3	4	5
Skupina L2 – A	4	2	0	3	0
Skupina L2 – B	5	1	1	1	1
Celkem	9	3	1	4	1
V procentech	50,0 %	16,7 %	5,6 %	22,1 %	5,6 %

Tabulka 1 – Výsledná známka z testu

Výsledek neodpovídá normálnímu rozložení, ale domnívám se, že lepšího rozložení dosáhneme použitím písemných testů. Výsledky v obou skupinách jsou podobné. Úlohy jsou jednoduché a každý žák by je měl lehce zvládnout, pokud dobře ovládá práci se zlomky.

Závěr

Úkolem práce bylo zmapovat postupy pro zápis egyptských zlomků a vytvořit studijní materiály pro výuku tohoto tématu. Po studiu Egyptských materiálů jsme zjistili, že Egyptané měli propracovaný logický systém, který u všech základních operací vedl k získání výsledků. Možná se někomu zdají dané operace s egyptskými zlomky příliš složité, ale starověký svět neznal náš současný symbolický zápis a musel vymyslet efektivní postup pro práci se zlomky bez pozičního zápisu čísel. Téma je velmi zajímavé a dá se neustále rozvíjet, stejně jako vytvořené materiály. Uvedené čtyři postupy zápisu racionálního čísla ve tvaru egyptských zlomků nejsou jediné, ale patří k těm zásadním. Nejlépe můžeme při výuce na střední škole využít takzvaný hladový algoritmus, ale i zbylé postupy jsou středoškolským studentům přístupné. Na tomto tématu si mohou žáci procvičit práci se zlomky, hledání společného dělitele, práci s přirozenými i racionálními čísly.

Výsledkem jsou i výukové prezentace a kurz v prostředí Moodle odzkoušený na dvou skupinách druhého ročníku.

Pokud si uvědomíme, že tyto postupy v jisté podobě aplikovali Egyptané v období Staré říše, můžeme obdivovat jejich dovednost a představivost. Znamená to, že staří Egyptané sice měli jednoduché prostředky, ale jejich myšlení, organizační schopnosti a postupy jim umožnily vytvořit úžasná díla, která můžeme obdivovat i my. To je důkazem, že rozdíl mezi lidmi starověkého světa a námi je jen v technických vymoženostech a znalostech získaných za celou dobu naší civilizace. Naši předci nebyli hloupí, byli schopni stejných úvah a představ. Písemné záznamy navíc dokazují, že byli schopni celou řadu úvah a postupů provádět z paměti. U tak abstraktních pojmů, jako jsou racionální čísla, je to obdivuhodné.

Použitá literatura

- [1] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 23. ISBN 80-719-6255-4.
- [2] VYMAZALOVÁ, Hana. *Staroegyptská matematika: hieratické matematické texty*. Vyd. 1. Praha: Český egyptologický ústav, 2006, 155 s. Dějiny matematiky (Český egyptologický ústav), sv. 31. ISBN 80-730-8156-3.
- [3] VYMAZALOVÁ, Hana a Filip COPPENS. *Moudrost svitků boha Thovta: vědecké poznání za vlády faraonů*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, 2011, 352 s. ISBN 978-807-3083-588.
- [4] VYMAZALOVÁ, Hana. *Počty v zemi faraonů: matematika stavitelů pyramid*. Praha: Český egyptologický ústav Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2008, 32 s. ISBN 978-80-7363-215-1.
- [5] BLEICHER, M.N. A new algorithm for the expansion of Egyptian fractions. *Journal of Number Theory*. 1972, vol. 4, issue 4, s. 342-382. DOI: 10.1016/0022-314X(72)90069-8. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022314X72900698>
- [6] GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. New York: Dover, 1982c1972, x, 286 p. ISBN 04-862-4315-X.
- [7] STACHOVCOVÁ, Lada. Vyjádření racionálního čísla pomocí egyptských zlomků. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2001, roč. 9, č. 4, s. 8.
- [8] BERAN, Ladislav a Milan TRCH. Egyptské zápisy zlomků II: Postupné redukce zlomků. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010, roč. 18, č. 2, s. 8.
- [9] BERAN, Ladislav a Milan TRCH. Egyptské zápisy zlomků IV: Obtížně vyjádřitelné zlomky. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010, roč. 18, č. 4, s. 8.
- [10] Egyptian Fractions. LOY. *Jim Loy's Egyptian Hieroglyphics and Egyptology Page* [online]. 1. vyd. 1998 [cit. 2013-05-16]. Dostupné z: <http://www.jimloy.com/egypt/fraction.htm>.
- [11] KNOTT, Dr Ron. Egyptian Fractions. UNIVERSITY OF SURREY. *Egyptian Fractions* [online]. Manchester, 1996-2008, 2008-03-26 [cit. 2013-05-16]. Dostupné z: <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html>
- [12] EPPSTEIN, David. Ten Algorithms for Egyptian Fractions. UNIVERSITY OF CALIFORNIA. *Mathematica in Education* [online]. 1995. vyd. California, 1995 [cit. 2013-05-16]. Dostupné z: http://library.wolfram.com/infocenter/Articles/2926/Egyptian.nb?file_id=2891

Obsah CD

Egyptské zlomky.doc.....	Elektronická verze práce ve formátu doc
Egyptské zlomky.pdf	Elektronická verze práce ve formátu pdf
JakPočítaliVeStarémEg1C.ppt.....	Prezentace první část – Egyptská čísla
JakPočítaliVeStarémEg2C.ppt.....	Prezentace druhá část – Egyptské zlomky
PracovníListEg1C.doc.....	Pracovní listy k první prezentaci ve formátu doc
PracovníListEg2C.doc.....	Pracovní listy k druhé prezentaci ve formátu doc
PracovníListEg1C.pdf	Pracovní listy k první prezentaci ve formátu pdf
PracovníListEg2C.pdf	Pracovní listy k druhé prezentaci ve formátu pdf
MoodleEgZlomky.rar	Kurz ve formátu Moodle verze 2.4
TestAB.pdf.....	Tištěná verze testu ve dvou skupinách
TestŘešení.pdf.....	Úlohy s řešením