# Průběh funkce

## <u>Příklad 1</u>

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = 3x^4 + 20x^3 + 36x^2$.

*<u>Řešení:</u>* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, $\quad \Rightarrow$ asymptoty nejsou.

Z první derivace zjistíme stacionární body:

$f'(x) = 12x^3 + 60x^2 + 72x$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 5x^2 + 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+2)(x+3) = 0 \;\Rightarrow$ funkce má tři stacionární body: $x_1 = -3$ ; $x_2 = -2$ ; $x_3 = 0$.

O jaké extrémy jde, poznáme buď ze znaménka druhé derivace, nebo z limit v nekonečnu a spojitosti funkce.

$f''(x) = 36x^2 + 120x + 72$

1. $f''(-3) = 36 \;\Rightarrow\; x_1 = -3$ je bod *lokálního minima*, $f_{min}(-3) =$ 27.
2. $f''(-2) = -24 \;\Rightarrow\; x_2 = -2$ je bod *lokálního maxima*, $f_{max}(-2) =$ 32.
3. $f''(0) = 72 \;\Rightarrow\; x_3 = 0$ je bod *lokálního minima*, $f_{min}(0) = 0$.

Inflexní body leží v intervalech $(-3; -2)$ a $(-2; 0)$ a vypočítají se z rovnice $f''(x) = 0$.
Graf je na obrázku 1.

## <u>Příklad 2</u>

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - x|x+1|}{x-2}$.

*<u>Řešení:</u>* $D_f = R \setminus \{2\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{x-2}, & x \in (-\infty; -1\rangle\,, \\ \dfrac{-x}{x-2}, & x \in \langle -1; \infty) \setminus \{2\}. \end{cases}$$

Zjistíme asymptoty.

1. $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{-x}{x-2} = \dfrac{-2}{0^\pm} = \pm\infty \;\Rightarrow$ svislá asymptota $x = 2$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{x-2} = -1 \;\Rightarrow$ vodorovná asymptota $y = -1$ v $+\infty$.

   Pro velká kladná $x$ platí $\dfrac{-x}{x-2} < -1 \quad \Rightarrow$ funkce se blíží k asymptotě zdola.
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x}{x-2} = -\infty \;\Rightarrow$ může být šikmá asymptota.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{2x^2 + x}{x-2}}{x} = 2 = k$ je směrnice šikmé asymptoty.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x}{x-2}-2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-2x^2+4x}{x-2}=5=q$$

Šikmá asymptota je $y=2x+5$.

Průsečíky grafu s šikmou asymptotou.

$\dfrac{2x^2+x}{x-2}=2x+5 \;\;|\cdot(x-2)$

$2x^2+x=2x^2+x-10 \;\Rightarrow\;$ průsečíky nejsou, graf funkce se blíží k asymptotě zdola.

Průsečíky grafu $f$ s osami:

$x=0 \;\Rightarrow\; f(x)=0 \;\Rightarrow\; P_x[0;0]$, jiné nejsou.

Zjistíme stacionární body.

1. $x\in(-\infty;-1\rangle \quad f'(x)=\dfrac{(4x+1)(x-2)-(2x^2+x)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-8x-2}{(x-2)^2}$

   $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-4x-1=0 \;\Rightarrow\; x_1\doteq 2{,}12;\; x_2\doteq -0{,}23.$

   Kořeny nevyhovují, neboť nepatří do intervalu $(-\infty;-1\rangle$.

   $\Rightarrow$ pro $x\leqq -1$ je $f'(x)>0$ a funkce je rostoucí.

2. $x\in\langle-1;\infty)\setminus\{2\} \quad f'(x)=\dfrac{-(x-2)+3}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{(x-2)^2}>0 \;\Rightarrow\;$ funkce je rostoucí.

Inflexní bod (funkce se mění z konkávní na konvexní) je v bodě $x=-1$. Graf je na obr. 2.

## Neřešené příklady

Určete průběh funkce, nakreslete graf.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $f(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x^2+x}$ | 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{6x-12}$ | 3) $f(x)=\ln(x^2-1)$ |
| 4) $f(x)=(\arctan x)^2$ | 5) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$ | 6) $f(x)=\ln\left[(x-2)^2+1\right]$ |

7) $f(x)=\tan x+\cot x;\; x\in(-\pi;\pi)$ 8) $f(x)=\cos x-\ln(\cos x);\; x\in(-\pi;\pi)$

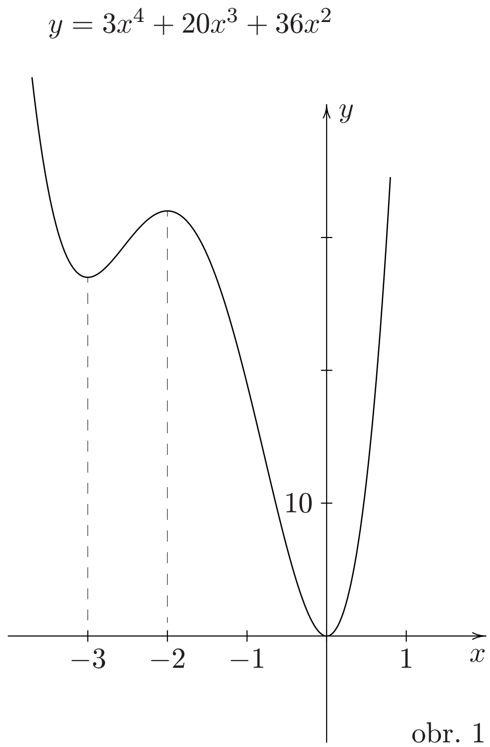
**Výsledky:**

**1)** $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$. Svislé asymptoty: $x=-1$, zprava funkční hodnoty rostou (ale funkce je klesající!), zleva klesají, $x=0$, zprava funkční hodnoty rostou, zleva klesají. Šikmá asymptota $y=x-1$, v $+\infty$ se funkce blíží shora, v $-\infty$ zdola, jedno lokální minimum na intervalu $\langle 0{,}2\rangle$, jedno lokální maximum na intervalu $\langle -3,-1\rangle$, na přesné určení polohy extrémů zatím není aparát. Graf je na obrázku 3.

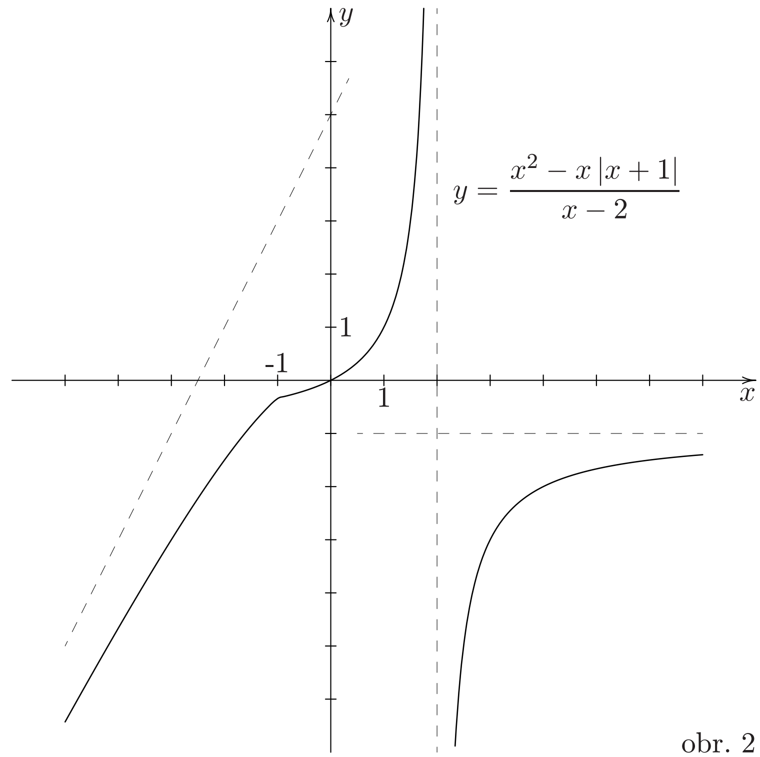
**2)** $D_f=\mathbf{R}\setminus\{2\}$. Svislá asymptota $x=2$, zprava funkční hodnoty rostou, zleva klesají, stacionární body $x=0$, $x=3$, lokální minimum $f_{lmin}(3)=4.5$, graf je na obrázku 4.

**3)** $D_f=\mathbf{R}\setminus\langle-1,1\rangle$. Funkce je sudá, graf je symetrický podle osy $y$. Svislé asymptoty $x=-1$, $x=1$, lokální extrémy nejsou, graf je na obrázku 5.

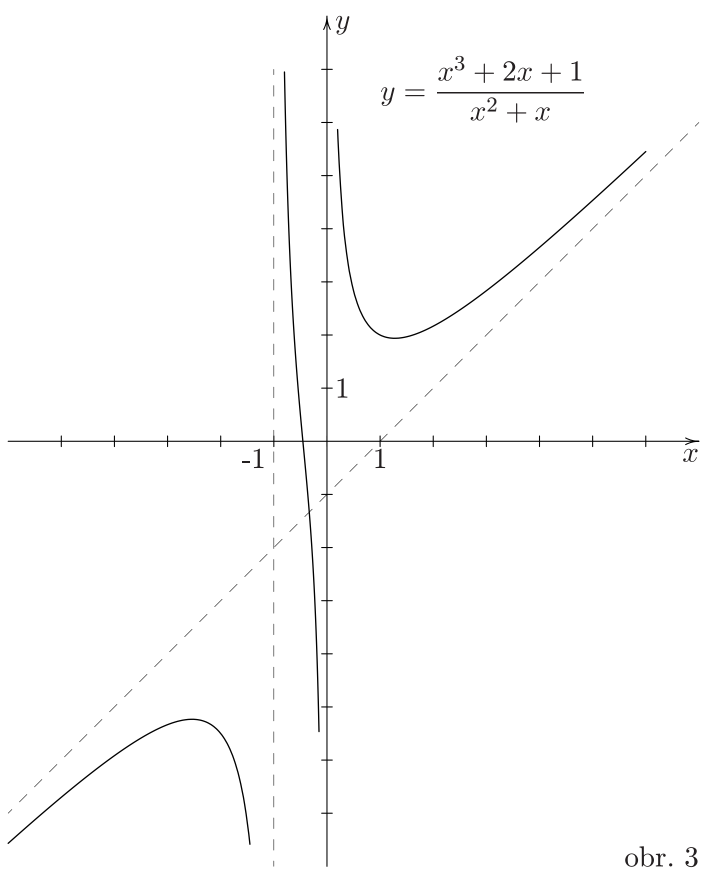
**4) - 8)** grafy jsou na obrázcích 6 - 10.



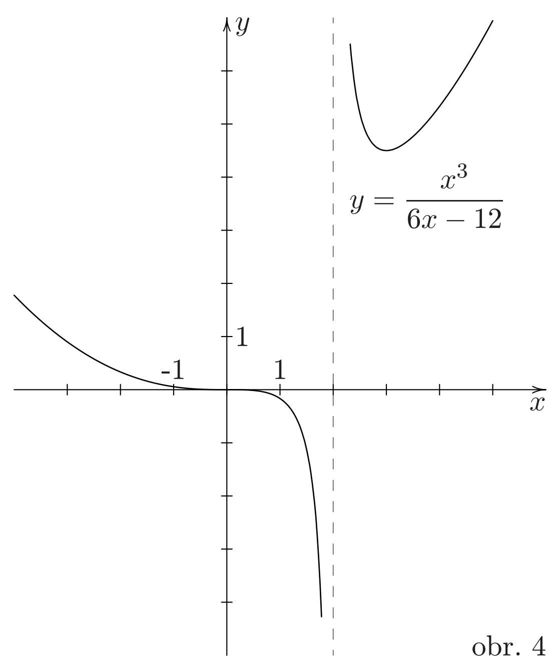

obr. 1



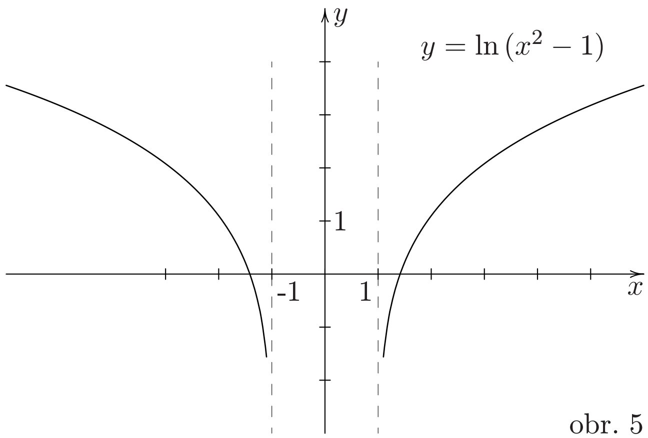

obr. 2



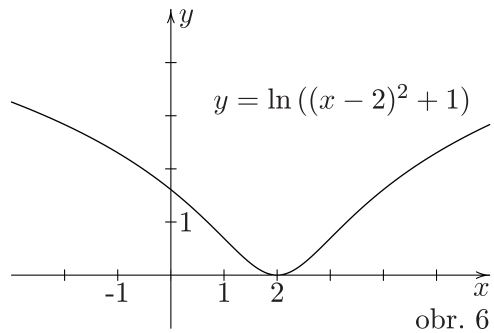

obr. 3



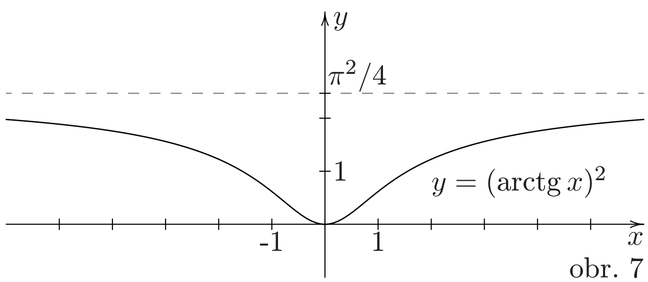

obr. 4



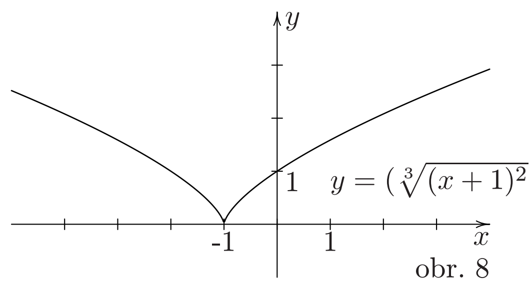

obr. 5



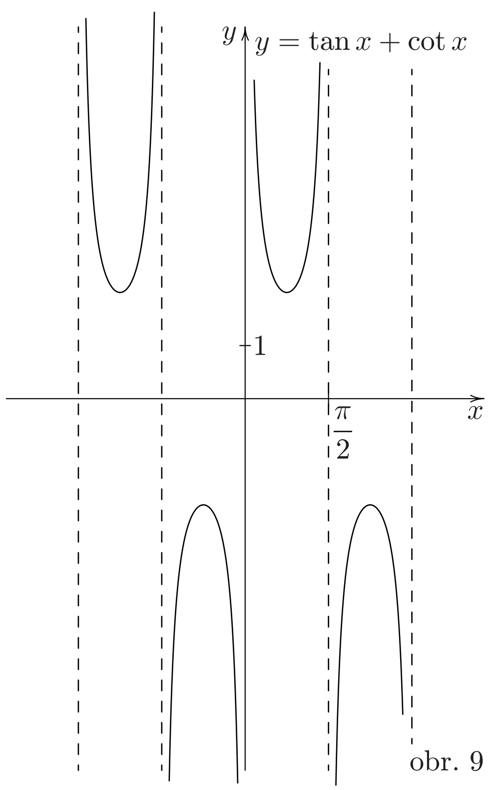

obr. 6



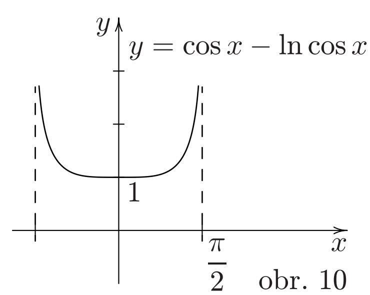

obr. 7




obr. 8




obr. 9




obr. 10

Funkce je definována
pouze na $(-\pi/2, \pi/2)$.