1. Základy diferenciálního počtu

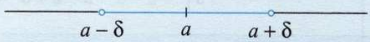
Obsah kapitoly:

Spojitost funkce

Chceme-li sestrojit graf funkce $y = f(x)$, můžeme postupovat tak, že určíme „dostatečně" velký počet bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$ a poté je spojujeme. Vzniká otázka, zda vlastnosti funkce a představu o jejím chování můžeme zpřesnit a prohloubit. Proto je vybudován diferenciální počet a v něm jako první zavádíme pojem spojité funkce a limity.

V definici spojitosti a limity funkce $y = f(x)$ v bodě a (reálné číslo a) používáme okolí bodu a (okolí reálného čísla a).

δ-OKOLÍM BODU a, kde $\delta \in R^+$, nazveme otevřený interval $(a-\delta, a+\delta)$, tj. množinu všech čísel x, pro něž platí $|x-a| < \delta$.



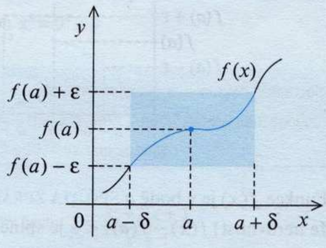
LEVÝM δ-OKOLÍM BODU a, kde $\delta \in R^+$, nazýváme interval $(a-\delta, a\rangle$.
PRAVÝM δ-OKOLÍM BODU a, kde $\delta \in R^+$, nazýváme interval $\langle a, a+\delta)$.

ε-OKOLÍM BODU $f(a)$, kde $\varepsilon \in R^+$, nazveme otevřený interval $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, tj. množinu všech čísel $f(x)$, pro něž platí $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Spojitost funkce v bodě

FUNKCE $y = f(x)$ JE SPOJITÁ V BODĚ a, jestliže:

1. je definována v nějakém okolí bodu a (včetně bodu a samotného),
2. ke každému ε-okolí bodu $f(a)$ existuje δ-okolí bodu a tak, že pro všechna x z δ-okolí bodu a patří funkční hodnoty $f(x)$ do ε-okolí bodu $f(a)$.



Poznamenejme, že 2. část této definice lze ekvivalentně formulovat takto: ke každému (libovolně malému) $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je $f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

Věty o spojitosti funkce v bodě

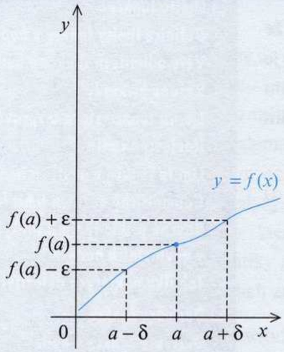
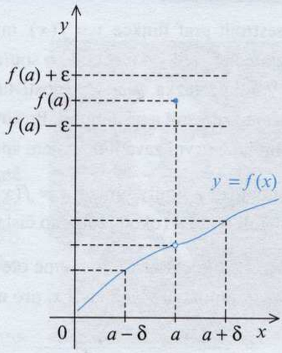
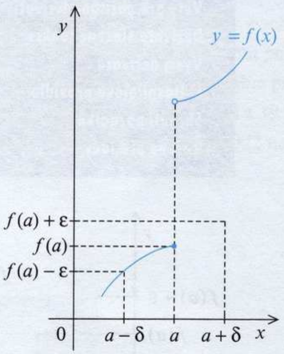
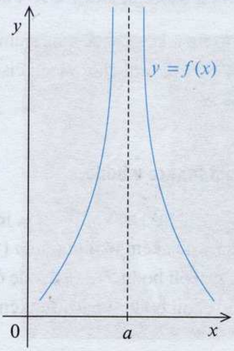
- Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě a, pak je v tomto bodě spojitá i funkce:
  a) $f(x)+g(x)$
  b) $f(x)-g(x)$
  c) $f(x)\cdot g(x)$
  d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad g(a) \neq 0$
- Funkce $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kde $n \in Z_0^+$, $a_n \neq 0$, $a_i \in R$ $(i \in Z_0^+)$, $x \in R$, je funkce spojitá v každém bodě.
- Funkce $f(x) = c$, kde $c \in R$, je spojitá v každém bodě $x \in R$.
- Funkce $f(x) = x$ je spojitá v každém bodě $x \in R$.
- Funkce $f(x) = \sin x$ a $f(x) = \cos x$ jsou spojité v každém bodě $x \in R$.

Spojitost funkce v bodě vyšetřujeme buď podle definice o spojitosti funkce v bodě, nebo podle vět o spojitosti funkce v bodě.

Polynomické funkce, goniometrické funkce, exponenciální funkce a logaritmické funkce jsou spojité ve všech bodech, v nichž jsou tyto funkce definované.

Pojmy spojitost funkce, limita a derivace funkce patří k základním pojmům diferenciálního počtu.

Geometrický význam spojitosti funkce v bodě

<table>
<tr><th>Funkce $y = f(x)$ je spojitá v bodě a, protože jsou splněny oba požadavky definice o spojitosti funkce v bodě.</th><th>Funkce $y = f(x)$ není spojitá v bodě a, protože není splněn 2. požadavek definice o spojitosti funkce v bodě.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Funkce $y = f(x)$ není v bodě a spojitá, protože není splněn 2. požadavek definice o spojitosti funkce v bodě.</td><td>Funkce $y = f(x)$ není v bodě a spojitá, protože není splněn 1. požadavek definice o spojitosti funkce v bodě.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Funkce $f(x)$ je v bodě a **SPOJITÁ ZPRAVA**, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pro všechna $x \in \langle a, a+\delta)$.
Funkce $f(x)$ je v bodě a **SPOJITÁ ZLEVA**, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pro všechna $x \in (a-\delta, a\rangle$.

- Funkce $f(x)$ je **SPOJITÁ** v bodě a, právě když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava.

Spojitost funkce v intervalu

FUNKCE $y = f(x)$ JE SPOJITÁ V INTERVALU I, jestliže je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Věty o spojitosti funkce v intervalu

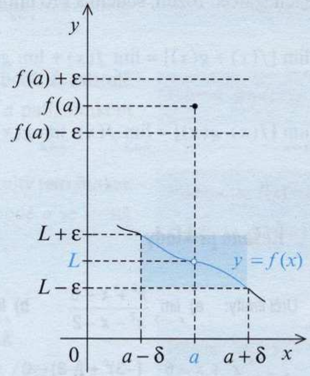
- Funkce $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
- Funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.
- Funkce $f(x) = a^x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \log_a x$ a $f(x) = \ln x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Limita funkce

Definice limity funkce v bodě

FUNKCE $y = f(x)$ MÁ V BODĚ a LIMITU L, jestliže:

1. je definována pro všechna x z nějakého okolí bodu a,
2. ke každému (libovolně malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z δ-okolí bodu a náleží odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ do ε-okolí bodu L.



Zapisujeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Čteme: Limita funkce $y = f(x)$ pro x blížící se k a je rovna L.

Na obrázku vidíme funkci $y = f(x)$, která má v bodě a limitu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (má limitu rovnu L). Jedná se o tzv. vlastní limitu funkce ve vlastním bodě a.

Věty o limitách funkce v bodě

- Funkce $y = f(x)$ má v bodě a nejvýše jednu limitu. Tedy: funkce $y = f(x)$ buď v bodě a limitu nemá, nebo má v tomto bodě právě jednu limitu.
- Funkce $y = f(x)$ je v bodě a spojitá, právě když je v bodě a definována a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

⇐ Věta vlevo definuje spojitost funkce v bodě s využitím znalostí limity (viz Př. 1 a Př. 2 na této straně).

Př. 1

Urči limitu: $\lim\limits_{x \to -1} (3x^7 - x^2 + 1)$

$$\lim_{x \to -1} (3x^7 - x^2 + 1) = 3(-1)^7 - (-1)^2 + 1 = -3 - 1 + 1 = -3$$

Př. 2

Urči limitu: $\lim\limits_{x \to 0} x^2$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

- Jestliže pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ platí pro všechna $x \neq a$ jistého okolí bodu a rovnost $f(x) = g(x)$ a má-li funkce $g(x)$ v bodě a limitu L, pak má v témže bodě limitu L také funkce $f(x)$.

⇐ Pomocí věty vlevo můžeme v některých případech zjistit limitu $f(x)$ v bodě a, v němž funkce není spojitá (viz Př. 3 a Př. 4 na této straně).

Př. 3

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(3x - 1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (3x - 1) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Př. 4

Urči limitu: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

- Jestliže pro každé $x \neq a$ jistého okolí bodu a platí $f(x) < g(x) < h(x)$ a jestliže existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, pak existuje také limita funkce $g(x)$ v tomto bodě a platí: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.
- Je-li $f(x) = c$ konstantní funkce pro všechna $x \in R$, pak je $\lim\limits_{x \to a} c = c$ pro všechna $a \in R$.

⇐ Užitím věty vlevo lze dokázat, že $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Hodnotu limity $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ si lze ověřit též s pomocí L' Hospitalova pravidla uvedeného na straně 16.
Je k tomu potřeba znalost derivování. Znalost hodnoty této limity využijeme v Př. 6 na straně 8.

Věta o početních operacích s limitami

- Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ v bodě a limity, tj. existují-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, pak mají v tomto bodě limitu i jejich součet, rozdíl, součin a pro $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ i jejich podíl. Přitom platí:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \qquad \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) \qquad \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Řešené příklady

Př. 5

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \dfrac{(-3)^2+(-3)-6}{(-3)^2-(-3)-2} = \dfrac{9-3-6}{9+3-2} = \dfrac{0}{10} = 0$

a) Protože funkce v limitě je spojitá, do zlomku bez jakýchkoliv jeho úprav můžeme rovnou za x dosadit číslo -3.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+5-4} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+1} =$

$= \sqrt{-1+5}+2 = 4$

b) Za x nelze ihned dosadit číslo -1, vznikl by zlomek typu $\frac{0}{0}$. Zlomek jsme rozšířili výrazem $\sqrt{x+5}+2$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{5}{3}$

c) Za x nelze ihned dosadit číslo 2, vznikl by zlomek typu $\frac{0}{0}$. Zlomek jsme proto upravili tak, že jsme čitatele i jmenovatele převedli na součin a následně pokrátili.

Př. 6

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x\cos^2 x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3}{x^2+1}+\dfrac{x}{\sin x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x\cos^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot 3\cos^2 x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\cdot \lim\limits_{x\to 0} 3\cos^2 x = 1\cdot 3 = 3$

a) Při řešení tohoto příkladu využíváme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Obecně: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$ pro každé $\alpha \in R - \{0\}$.

Stačí označit $h = \alpha x$, a protože při $x \to 0$ je $h \to 0$,

pak $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3}{x^2+1}+\dfrac{x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^2+1} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 3+1 = 4$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

d) Při řešení příkladu využíváme vztahu $\sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$.

Jestliže platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, pak obdobně platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 3x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} 3\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$

e) Jestliže platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, pak obdobně platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$.

Limita funkce zleva a zprava v bodě

Funkce $f(x)$ má v bodě a limitu L zleva, jestliže ke každému ε-okolí bodu L existuje levé δ-okolí bodu a tak, že pro všechna $x \neq a$ z levého δ-okolí bodu a patří funkční hodnoty $f(x)$ do ε-okolí bodu L.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$

Funkce $f(x)$ má v bodě a limitu L zprava, jestliže ke každému ε-okolí bodu L existuje pravé δ-okolí bodu a tak, že pro všechna $x \neq a$ z pravého δ-okolí bodu a patří funkční hodnoty $f(x)$ do ε-okolí bodu L.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = L$

- Limita funkce $f(x)$ v bodě a existuje a je rovna L, právě když existují limity této funkce v bodě a zprava a zleva a jsou rovny L. Tedy limita funkce $f(x)$ v bodě a se rovná společné hodnotě limit této funkce v bodě a zprava a zleva.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$

Nevlastní limita

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z okolí $(a-\delta, a+\delta)$ bodu a je $f(x) > K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z okolí $(a-\delta, a+\delta)$ bodu a je $f(x) < K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zleva, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x) > K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = +\infty$

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$ zleva, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x) < K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = -\infty$

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zprava, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ je $f(x) > K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = +\infty$

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zleva, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x) > K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = +\infty$

Funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$ zprava, jestliže ke každému číslu K existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ je $f(x) < K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = -\infty$

Limita funkce v nevlastním bodě

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ limitu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový bod x_0, že pro všechna $x > x_0$ patří funkční hodnoty $f(x)$ do okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový bod x_0, že pro všechna $x < x_0$ patří funkční hodnoty $f(x)$ do okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x > x_0$ je $f(x) > K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x > x_0$ je $f(x) < K$.

Píšeme: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $-\infty$ nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x < x_0$ je $f(x) > K$.

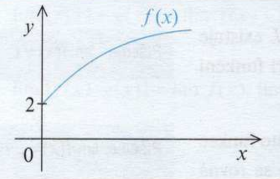
Píšeme: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $-\infty$ nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x < x_0$ je $f(x) < K$.

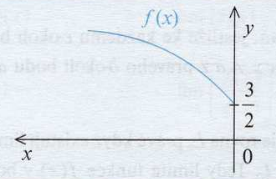
Píšeme: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Geometrický význam limit funkcí

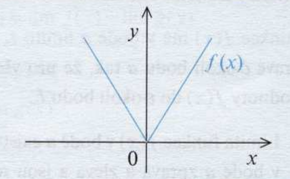
Limita zprava: $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 2$



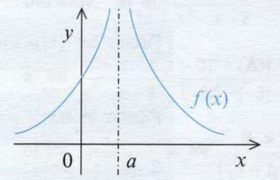
Limita zleva: $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \dfrac{3}{2}$



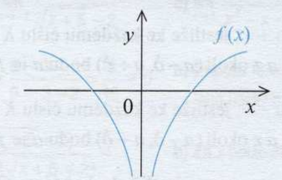
Limity zprava i zleva se rovnají: $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



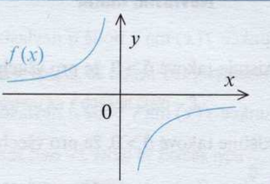
Nevlastní limita $+\infty$ pro $x \to a$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



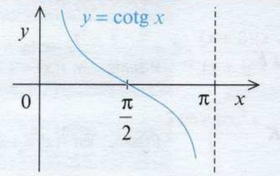
Nevlastní limita $-\infty$ pro $x \to 0$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$



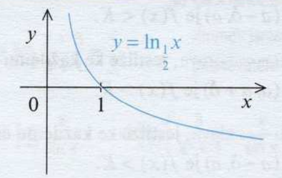
Nevlastní limita $+\infty$ pro $x \to 0_-$: $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = +\infty$



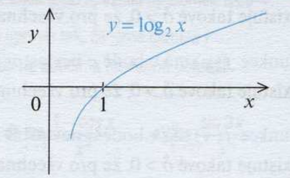
Nevlastní limita $-\infty$ pro $x \to \pi_-$: $\lim\limits_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty$



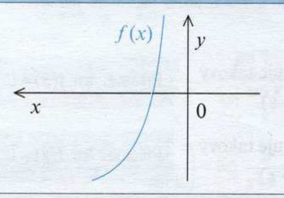
Nevlastní limita $+\infty$ pro $x \to 0_+$: $\lim\limits_{x \to 0_+} \ln_{\frac{1}{2}} x = +\infty$



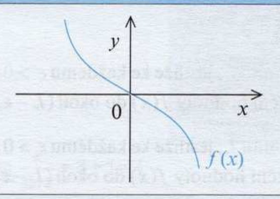
Nevlastní limita $-\infty$ pro $x \to 0_+$: $\lim\limits_{x \to 0_+} \log_2 x = -\infty$



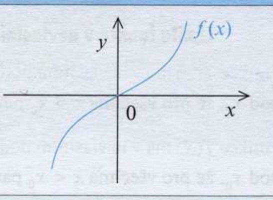
Nevlastní limita $+\infty$ pro $x \to 0_-$: $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = +\infty$



Nevlastní limita v nevlastním bodě: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Nevlastní limita v nevlastním bodě: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Řešené příklady limit funkcí v nevlastních bodech

Př. 7

Urči limitu: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{1 - x^2}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{\frac{1}{x^2} - 1} + 2^{\frac{1}{x}} \right) = \frac{5}{-1} + 2^0 = -5 + 1 = -4$$

Př. 8

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})\cdot(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$$

a) Zlomek (se jmenovatelem 1) jsme rozšířili výrazem $x+\sqrt{x^2-1}$.

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=2$$

b) Použili jsme větu o součtu limit. Číslo x jsme umocnili na druhou a napsali je pak pod společnou druhou odmocninu.

Př. 9

Urči limity: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+5}{2x+3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-x+2}{3x^3+x^2+x-2}$

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+5}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2+3x+5}{x^2}}{\dfrac{2x+3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-x+2}{3x^3+x^2+x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(4-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{4-0+0}{3+0+0-0}=\frac{4}{3}$$

Př. 10

Urči limitu: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-5}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}}=$$

$$=+\infty\cdot\frac{2-0+0}{1+0-0}=+\infty\cdot 2=+\infty$$

Tabulka některých důležitých limit

$\lim\limits_{x\to 0_-}\dfrac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{1}{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0,\ n\in N$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ neexistuje	$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$, je-li $a\in(0,1)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$, je-li $a\in(0,1)$
$\lim\limits_{x\to 0_+}\log_a x=+\infty$, je-li $a\in(0,1)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$, je-li $a\in(0,1)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, je-li $a\in(1,\infty)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, je-li $a\in(1,\infty)$
$\lim\limits_{x\to 0_+}\log_a x=-\infty$, je-li $a\in(1,\infty)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$, je-li $a\in(1,\infty)$	$\lim\limits_{x\to 0_+}\ln x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ neexistuje	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ neexistuje	$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ neexistuje	$\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$ neexistuje
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}_-}\operatorname{tg} x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}_+}\operatorname{tg} x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0_-}\operatorname{cotg} x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0_+}\operatorname{cotg} x=+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Asymptoty grafu funkce

Na obrázku je zakreslen graf funkce

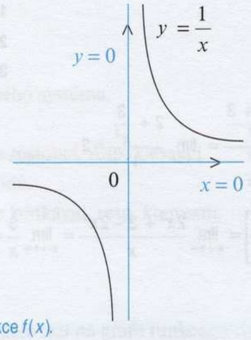
$y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Platí $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

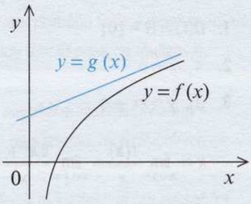
(nepřesně: pro „velké" hodnoty x jsou hodnoty funkce „blízké k nule").

Podobně: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Dále platí: $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{x} = \infty$ a $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{1}{x} = -\infty$



Přímky $y = 0$ a $x = 0$ jsou asymptotami funkce $f(x)$.



Na obrázku je vidět, že graf funkce $f(x)$ se s rostoucím x blíží k přímce o rovnici $y = g(x)$, tedy $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Přímka $y = g(x)$ je asymptotou funkce $f(x)$.

Mějme funkci $f(x)$, jejíž definiční obor obsahuje nějaký interval $\langle a, +\infty)$, respektive $(-\infty, a\rangle$. Říkáme: přímka $y = kx + q$ je **ASYMPTOTOU** grafu funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, respektive v bodě $-\infty$, jestliže platí $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$, respektive $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

- Mějme funkci $f(x)$, jejíž definiční obor obsahuje interval $\langle a, +\infty)$, respektive $(-\infty, a\rangle$, kde a je libovolné reálné číslo. Asymptota o rovnici $y = kx + q$ grafu funkce $f(x)$ existuje právě tehdy, když existují limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{respektive} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q$$

Asymptotám $y = kx + q$ říkáme asymptoty se směrnicí.

Je-li asymptota rovnoběžná s osou y, říkáme jí asymptota bez směrnice. Její rovnice je $x = x_0$.

Asymptotu bez směrnice definujeme takto: Přímka $x = x_0$ je asymptota bez směrnice grafu funkce $f(x)$, jestliže má funkce $f(x)$ v bodě x_0 alespoň jednu nevlastní limitu zprava nebo zleva, tj. $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x) = \pm\infty$.

Př. 15

Urči asymptoty ke grafu funkce $y = f(x) = \dfrac{2x^2}{2x-1}$.

1. Určíme $D(f)$.
2. Určíme rovnici asymptoty bez směrnice.
3. Určíme rovnici asymptoty se směrnicí.

1. $D(f) = R - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

2. $a_1\colon x = \dfrac{1}{2}$

3. $a_2\colon y = kx + q$

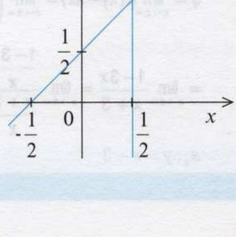
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{2x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2}{2x-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + x}{2x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$a_2\colon y = x + \dfrac{1}{2}$

Obdobně lze určit asymptotu pro $x \to -\infty$. Zjistíme, že tato asymptota má stejnou rovnici jako asymptota pro $x \to \infty$.



Př. 16

Urči asymptoty ke grafu funkce $y = f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x}$.

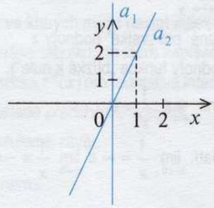
1. $D(f) = R - \{0\}$
2. $a_1 : x = 0$
3. $a_2 : y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2+3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{3}{x^2}}{1} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+3}{x} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3-2x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$a_2 : y = 2x$

1. Určíme $D(f)$.
2. Určíme rovnici asymptoty bez směrnice.
3. Určíme rovnici asymptoty se směrnicí.



Př. 17

Urči asymptoty ke grafu funkce $y = f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2+7}$.

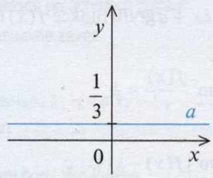
1. $D(f) = R$
2. Tato funkce nemá asymptotu bez směrnice.
3. $a : y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3x^2+7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2+7}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3+\frac{7}{x^2}} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3x^2+7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2+7}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{3+\frac{7}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$a : y = \dfrac{1}{3}$

1. Určíme $D(f)$.
2. Určíme rovnici asymptoty bez směrnice.
   Tato funkce nemá asymptotu bez směrnice, protože $3x^2 + 7 \neq 0$ pro žádné x.
3. Určíme rovnici asymptoty se směrnicí.



Př. 18

Urči asymptoty ke grafu funkce $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$.

1. $D(f) = R - \{-3\}$
2. $a_1 : x = -3$
3. $a_2 : y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{(x+3)\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2+3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2+3x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2-3x}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-3x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1-3x}{x}}{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-3}{1+\frac{3}{x}} = -3$$

$a_2 : y = x - 3$

1. Určíme $D(f)$.
2. Určíme rovnici asymptoty bez směrnice.
3. Určíme rovnici asymptoty se směrnicí.