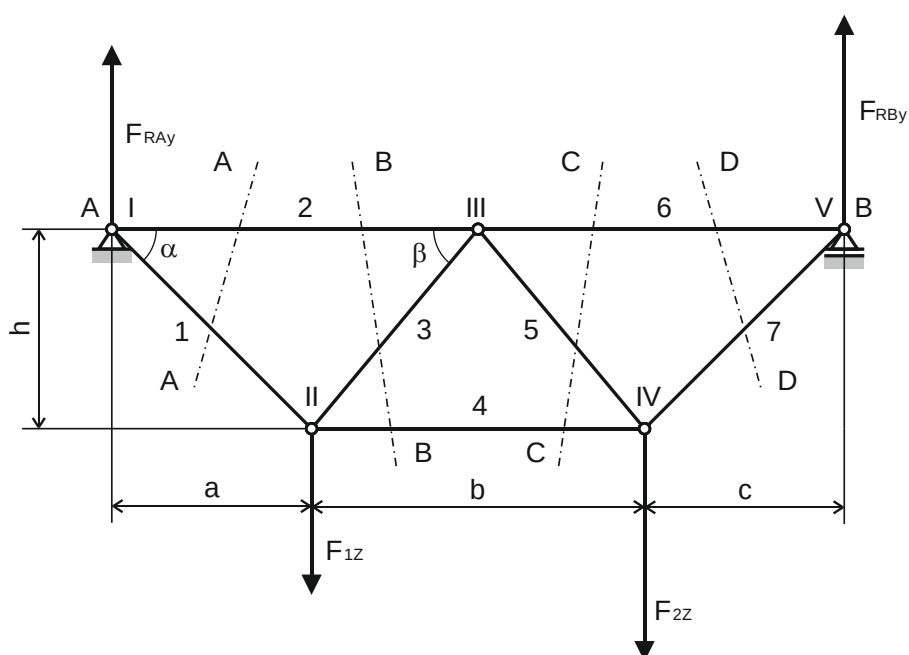
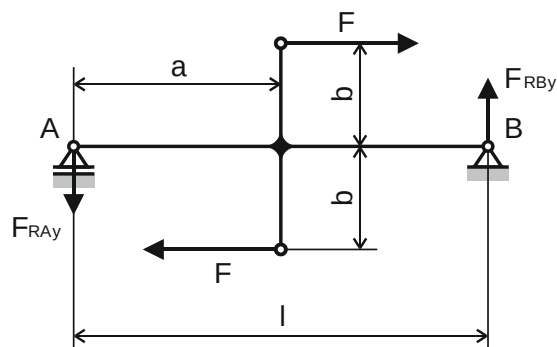
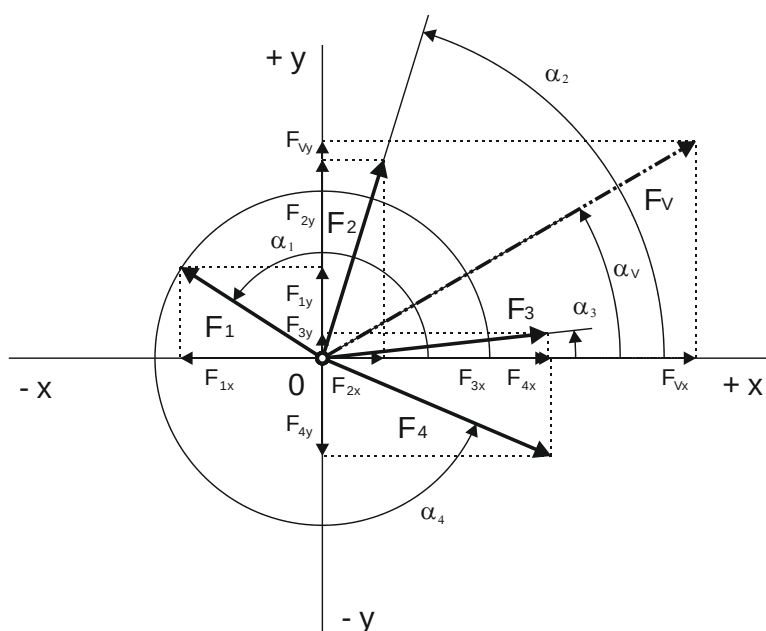


MECHANIKA – STATIKA



1. OBSAH

2.	MECHANIKA V TECHNICKÉ PRAXI	5
3.	ÚVOD DO STATIKY	6
3.1	Základní pojmy a veličiny	6
3.2	Určení síly v rovině	7
3.3	Určení síly v prostoru	8
4.	SOUSTAVA SIL PŮSOBÍCÍCH V JEDNÉ ROVINĚ.....	9
4.1	Určení výslednice dvou sil, jež mají stejné působíště a stejný směr	9
4.2	Určení výslednice dvou sil, jež mají stejné působíště a svírají pravý úhel	10
4.3	Určení výslednice dvou sil, jež mají stejné působíště a svírají obecný úhel.....	11
4.4	Rozklad síly do dvou směrů	12
4.4.1	Grafické řešení rozkladu síly do dvou směrů	12
4.4.2	Početní řešení rozkladu síly do dvou směrů.....	12
4.5	Určení výslednice soustavy sil se společným působíštěm, majících různý směr	13
4.5.1	Graficky – postupným skládáním sil.....	13
4.5.2	Graficky – silovým polygonem	13
4.5.3	Graficky – rozkladem sil do os x a y.....	14
4.5.4	Početně – rozkladem sil do os x a y.....	14
4.6	Určení výslednice sil, jež nemají společné působíště	18
4.6.1	Výslednice dvou různoběžných sil	18
4.6.2	Výslednice soustavy různoběžných sil	19
4.6.3	Výslednice dvou rovnoběžných sil	20
4.6.4	Výslednice soustavy rovnoběžných sil	20
4.7	Silová dvojice a její moment.....	21
4.8	Přeložení účinku síly do jiného působíště.....	23
4.9	Moment síly vzhledem k bodu.....	23
4.10	Moment soustavy sil vzhledem k bodu.....	24
5.	ROVNOVÁHA SIL.....	27
5.1	Rovnováha sil se společným působíštěm.....	27
5.2	Rovnováha soustavy sil, jež nemají společné působíště	28
5.3	Síly zátěžné a síly vazbové (reakce).....	29
5.4	Rovnováha sil na páce.....	34
5.4.1	Jednoramenná páka	34
5.4.2	Dvouramenná páka	36

5.5	Rovnováha sil na nosníku	43
5.5.1	Zátěžné síly jsou kolmé k podporám	43
5.5.2	Zátěžné síly mají obecný směr	44
5.5.3	Nosník se spojitým zatížením	48
5.5.4	Nosník zatížený silovou dvojicí	52
5.5.5	Nosník zatížený momentem síly	52
6.	PRUTOVÉ SOUSTAVY	54
6.1	Podmínka statické určitosti prutové soustavy	55
6.2	Počtení metody řešení prutové soustavy	57
6.2.1	Metoda styčnicková	57
6.2.2	Metoda průsečná	62
6.3	Grafické metody řešení prutové soustavy	66
6.3.1	Metoda styčnicková	66
6.3.2	Metoda Cremonova	70
7.	SOUSTAVA SIL V PROSTORU	73
7.1	Soustava sil se společným působišťem	73
7.2	Soustava sil, jež nemají společné působíště	74
7.3	Obecné podmínky, jež platí pro soustavu sil v prostoru	75
8.	TĚŽIŠTĚ	75
8.1	Těžiště čar	76
8.1.1	Počtení metoda určení polohy těžiště	77
8.1.2	Grafická metoda určení polohy těžiště	78
8.1.3	Poloha těžiště vybraných typů čar	80
8.2	Těžiště ploch	80
8.2.1	Počtení metoda určení polohy těžiště	80
8.2.2	Grafická metoda určení polohy těžiště	82
8.2.3	Poloha těžiště vybraných typů ploch	84
8.3	Těžiště těles	85
8.3.1	Počtení metoda určení polohy těžiště symetrického tělesa	85
8.3.2	Počtení metoda určení polohy těžiště nesymetrického tělesa	87
8.3.3	Poloha těžiště vybraných typů těles	89
9.	STABILITA TĚLESA	90
10.	PASIVNÍ ODPORY	91
10.1	Tření smykové	92
10.2	Tření čepové	93

10.3	Tření vláknové	93
10.4	Valivý odpor	95
11.	SILOVÉ POMĚRY U JEDNODUCHÝCH MECHANIZMŮ	96
11.1	Pevná kladka	96
11.2	Volná kladka	96
11.3	Klikový mechanismus úplný (křížákový)	97
11.4	Klikový mechanismus zkrácený (bezkřížákový)	98
11.5	Kloubový mechanismus	99

2. MECHANIKA V TECHNICKÉ PRAXI

Mechanika je souhrnná vědní disciplína, která tvoří základ pro řešení technických problémů při návrhu strojních zařízení. Dá se považovat za doplněk a v některých případech i základ ostatních technických předmětů.



Obr. 1 Jednotlivé disciplíny mechaniky.

3. ÚVOD DO STATIKY

Statika je část mechaniky těles, která se zabývá vzájemným působením těles. Toto vzájemné působení těles je vyjádřeno silovými účinky, neboli vzájemným působením sil. Úlohy ve staticce řešíme graficky nebo početně.

3.1 Základní pojmy a veličiny

Dokonale tuhé těleso

se při působení sil nedeformuje. Za tohoto předpokladu můžeme působící sílu libovolně přemístit po její nositelce. (U skutečných deformovatelných těles sílu po nositelce přemísťovat nelze).

Vázané těleso

je těleso, které je ve styku s okolními tělesy.

Silový účinek

je projevem vzájemného působení stýkajících se těles.

Uvolnění

je proces, při němž se vzájemné vazby stýkajících se těles nahradí silovými účinky.

Uvolněné těleso

po odstranění vazeb všemi dotýkajícími se tělesy je toto těleso vystaveno jen působení silových účinků.

Statická rovnováha

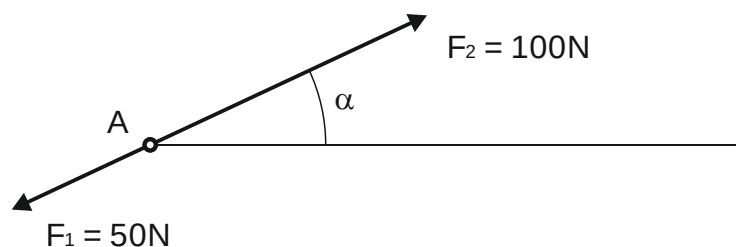
při statické rovnováze nezpůsobí silové účinky změnu pohybového stavu tělesa (klid, nebo pohyb rovnoměrný).

Statická ekvivalence

nastane tehdy, jestliže dvě silové soustavy způsobí stejný pohybový stav tělesa.

Síla

je technická veličina, která má své působíště, směr, smysl a velikost. Jedná se o veličinu vektorovou. Jednotkou velikosti síly je 1 Newton = $1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Sílu (jako vektorovou veličinu) lze znázorňovat graficky (viz. obr. 2.). Velikost síly při grafickém znázornění kreslíme ve zvoleném měřítku sil m_F .



Měřítko sil $m_F = 2,5\text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$

Obr. 2 Příklad znázornění sil. Bod A je působíště sil. Směr obou sil je totožný, určený úhlem α . Smysl sil je opačný. Síla F_1 má velikost 50N, síla F_2 má velikost 100N. Měřítko sil je zvoleno $m_F = 2,5\text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$; to znamená, že v grafickém znázornění má síla F_1 délku 20mm a síla F_2 má délku 40mm.

3.2 Určení síly v rovině

V rovině určujeme polohu působíště jeho souřadnicemi, směr síly určujeme úhlem sklonu vzhledem ke kladnému směru osy x, smysl podle souřadnicových os x a y a velikost hodnotou v N.

Určující hodnoty síly pak zapisujeme takto:

$$F_i (x_i, y_i; \alpha_i; N) \quad (1)$$

velikost síly

směr síly

souřadnice působíště síly

označení síly

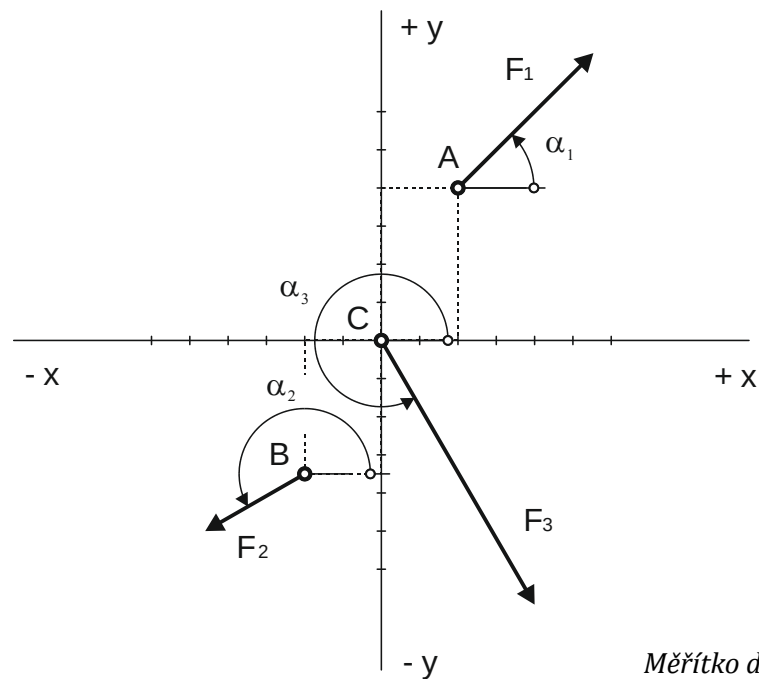
Příklad:

Graficky znázorněte zadané síly F_1 , F_2 a F_3 .

$F_1 (20, 40; 45^\circ; 250\text{ N})$

$F_2 (20, -35; 210^\circ; 150\text{ N})$

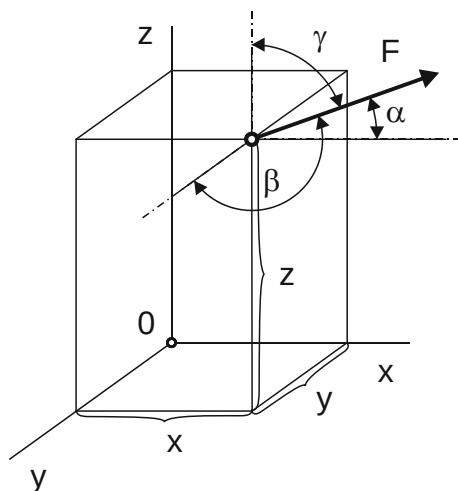
$F_3 (0, 0; 300^\circ; 400\text{ N})$

Řešení:Měřítko délek $m_L = 2\text{mm.mm}^{-1}$ Měřítko sil $m_F = 10\text{N.mm}^{-1}$

3.3 Určení síly v prostoru

V prostoru je určena poloha působíště síly F souřadnicemi x , y , z . Směr působení je pak dán úhly α , β , γ , jež jsou vázány vztahem:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2)$$

**Obr. 3** Určení síly v prostoru.

4. SOUSTAVA SIL PŮSOBÍCÍCH V JEDNÉ ROVINĚ

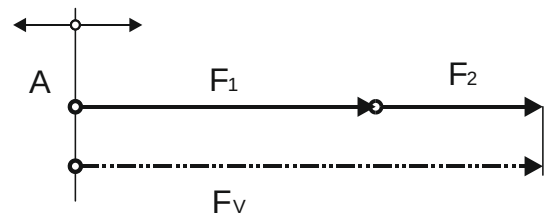
Více jak jedna působící síla tvoří tzv. soustavu sil. Účinek takovéto soustavy můžeme nahradit stejným účinkem síly jediné, kterou nazýváme výslednicí soustavy sil.

4.1 Určení výslednice dvou sil, jež mají stejné působiště a stejný směr

Způsob určení velikosti, směru a smyslu výslednice zadaných sil je patrný z následujících příkladů.

Příklad:

Řešení:

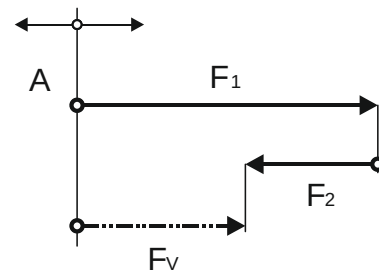


Pro daný příklad pak platí:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \text{a} \quad F_V = F_1 + F_2$$

Příklad:

Řešení:



Pro daný příklad pak platí:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \text{a} \quad F_V = F_1 - F_2$$

Obecně tedy bude pro libovolný počet sil se společným působištěm a směrem, ale rozdílným smyslem platit následující:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3)$$

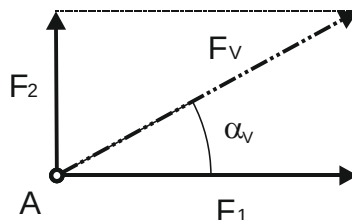
Příklady k procvičení:

Určete graficky a počtne velikost výslednice soustavy sil se společným působištěm a směrem:

- a) $F_1 = 300\text{N}$, $F_2 = 200\text{N}$, $F_3 = -300\text{N}$, $F_4 = -500\text{N}$
- b) $F_1 = -300\text{N}$, $F_2 = -200\text{N}$, $F_3 = 300\text{N}$, $F_4 = -400\text{N}$
- c) $F_1 = -200\text{N}$, $F_2 = 500\text{N}$, $F_3 = 300\text{N}$, $F_4 = -400\text{N}$

4.2 Určení výslednice dvou sil, jež mají stejné působiště a svírají pravý úhel

Jelikož síly jsou vektorové veličiny, tak velikost výslednice je dána součtem vektorovým, nikoli algebraickým. Graficky zjistíme velikost výslednice sil tak, že doplníme náčrsek sil F_1 a F_2 na tzv. silový rovnoběžník (v tomto případě má tvar obdélníku) a jeho úhlopříčka je hledanou výslednicí sil F_V . Působiště síly F_V je pak totožné s působištěm síly F_1 a F_2 (viz obr. 4).



Obr. 4 Grafické určení výslednice dvou sil se společným působištěm, svírajících pravý úhel.

Počtne pak určíme velikost výslednice Pythagorovou větou:

$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (4)$$

a úhel sklonu výslednice určíme ze vztahu:

$$\tan \alpha_V = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \alpha_V = \dots \quad (5)$$

Příklad:

Určete počtne a graficky velikost výslednice sil a její sklon pro zadané síly F_1 a F_2 .

$$F_1 (0,0;0^\circ;350\text{N}) \quad F_2 (0,0;90^\circ;200\text{N})$$

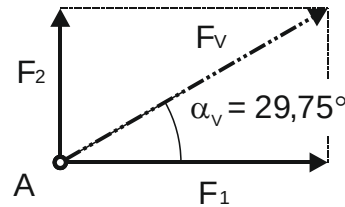
Řešení počtní:

$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{350\text{N}^2 + 200\text{N}^2} = 403\text{N}$$

$$\tan \alpha_V = \frac{F_2}{F_1} = \frac{200\text{N}}{350\text{N}} = 0,57 \Rightarrow \alpha_V = 29^\circ 44'$$

Řešení grafické:

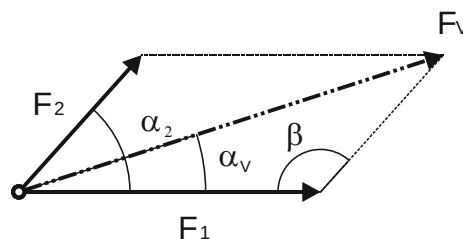
Měřítko sil $m_F = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$



$$F_V = m_F \cdot l_F = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 40,3 \text{ mm} = 403 \text{ N}$$

4.3 Určení výslednice dvou sil, jež mají stejné působiště a svírají obecný úhel

Graficky zjistíme velikost výslednice sil opět tak, že doplníme náčrtek sil F_1 a F_2 na silový rovnoběžník a jeho úhlopříčka je hledanou výslednicí sil F_V .



Obr. 5 Grafické určení výslednice dvou sil se společným působištěm, svírajících obecný úhel.

Početně učíme velikost výslednice pomocí cosinové věty:

$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta}$$

a jelikož

$$\beta = 180^\circ - \alpha_2$$

pak

$$\cos \beta = -\cos \alpha_2$$

a velikost výslednice je pak dána vztahem:

$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha_2} \quad (6)$$

Úhel sklonu výslednice určíme ze vztahu:

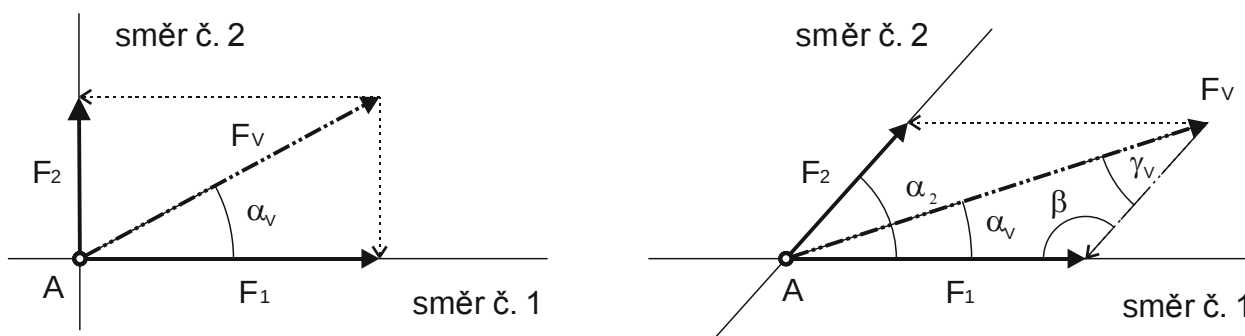
$$\frac{\sin \alpha_V}{\sin \beta} = \frac{F_2}{F_V} \quad \text{odtud} \quad \sin \alpha_V = \frac{F_2}{F_V} \cdot \sin \beta = \frac{F_2}{F_V} \cdot \sin(180^\circ - \alpha_2) \quad (7)$$

4.4 Rozklad síly do dvou směrů

Rozklad síly do dvou směrů (složek) se provádí opačným procesem, nežli určení výslednice dvou sil.

4.4.1 Grafické řešení rozkladu síly do dvou směrů

Provedeme doplnění nákresu vyšetřované síly na silový rovnoběžník v požadovaných směrech a tím získáme velikosti jednotlivých složek.



Obr. 6 Ukázky grafického řešení rozkladu síly do dvou směrů.

4.4.2 Početní řešení rozkladu síly do dvou směrů

Jednodušší variantou pro početní řešení je případ, kdy úhel mezi jednotlivými složkami vyšetřované síly $\alpha_2 = 90^\circ$, pak platí:

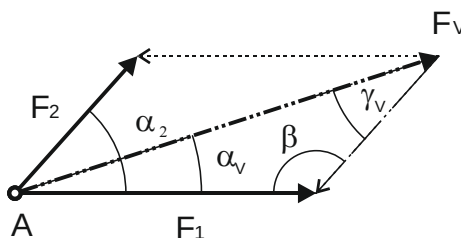
$$\cos \alpha_v = \frac{F_1}{F_v} \Rightarrow F_1 = F_v \cdot \cos \alpha_v \quad \text{a} \quad \sin \alpha_v = \frac{F_2}{F_v} \Rightarrow F_2 = F_v \cdot \sin \alpha_v \quad (8)$$

Pokud $\alpha_2 \neq 90^\circ$, pak platí:

$$\frac{\sin \alpha_v}{\sin \beta} = \frac{F_2}{F_v} \quad \text{odtud} \quad F_2 = \frac{\sin \alpha_v}{\sin \beta} \cdot F_v \quad (9)$$

a

$$\frac{\sin \gamma_v}{\sin \beta} = \frac{F_1}{F_v} \quad \text{odtud} \quad F_1 = \frac{\sin \gamma_v}{\sin \beta} \cdot F_v \quad (10)$$

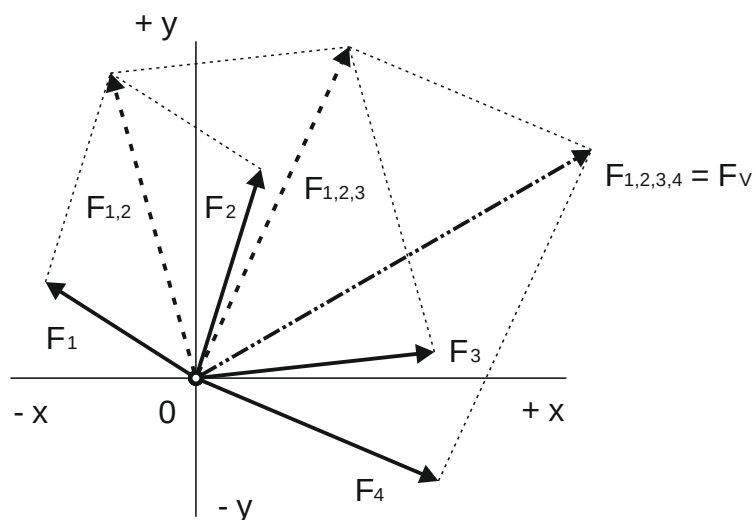


Obr. 7 Rozklad síly do dvou směrů.

4.5 Určení výslednice soustavy sil se společným působištěm, majících různý směr

4.5.1 Graficky – postupným skládáním sil

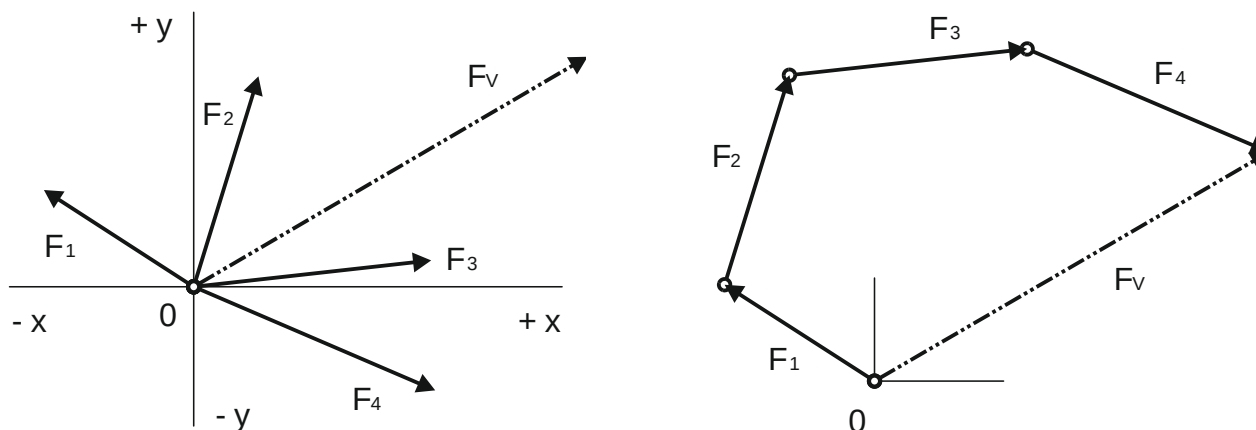
Postupujeme tak, že sestrojíme dílčí výslednici dvou zadaných sil, tuto pak složíme s další zadanou silou a tak pokračujeme až k poslední zadané síle, kdy zjistíme směr a velikost výslednice soustavy zadaných sil (viz. obr. 8). Na pořadí skládání sil přitom nezáleží.



Obr. 8 Určení výslednice soustavy sil se společným působištěm graficky - postupným skládáním sil.

4.5.2 Graficky – silovým polygonem

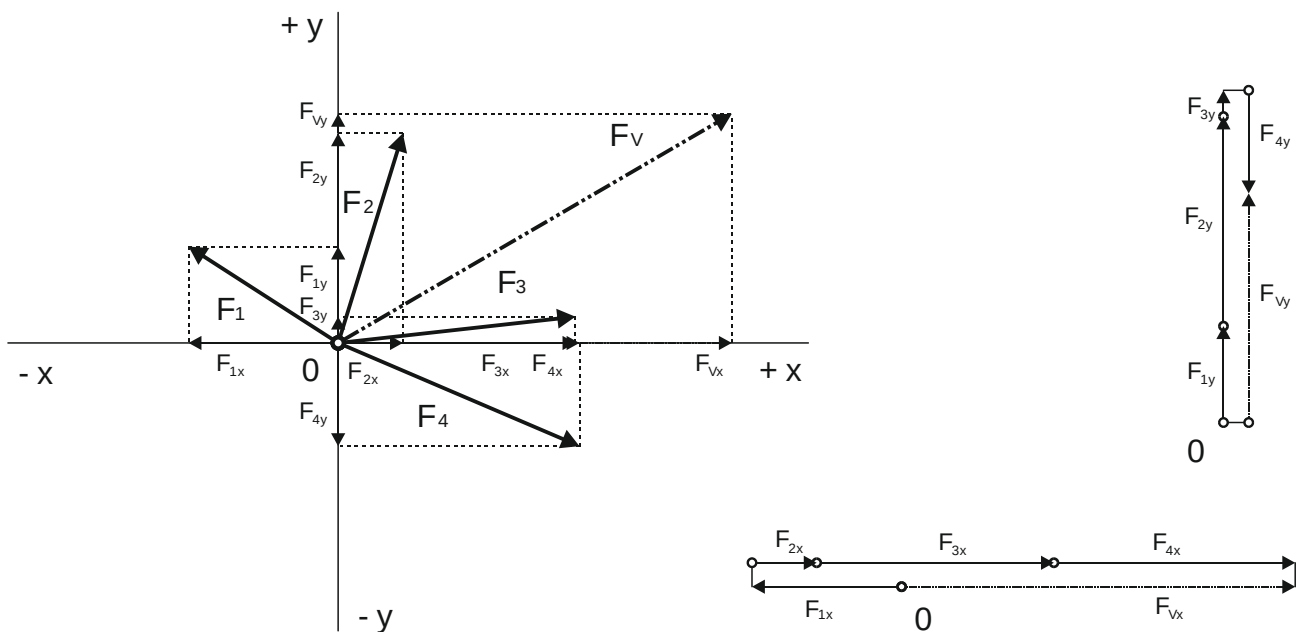
Silový polygon je mnohoúhelník složený z jednotlivých zadaných sil. Síly kreslíme ve zvoleném měřítku za sebou a to tak, že na sebe navazují. Na pořadí opět nezáleží, dodržujeme však směr a smysl vynášených sil. V počátku první vynášené síly je pak počátek výslednice a v konci poslední vynášené síly je taktéž konec výslednice.



Obr. 9 Určení výslednice soustavy sil se společným působištěm graficky – silovým polygonem.

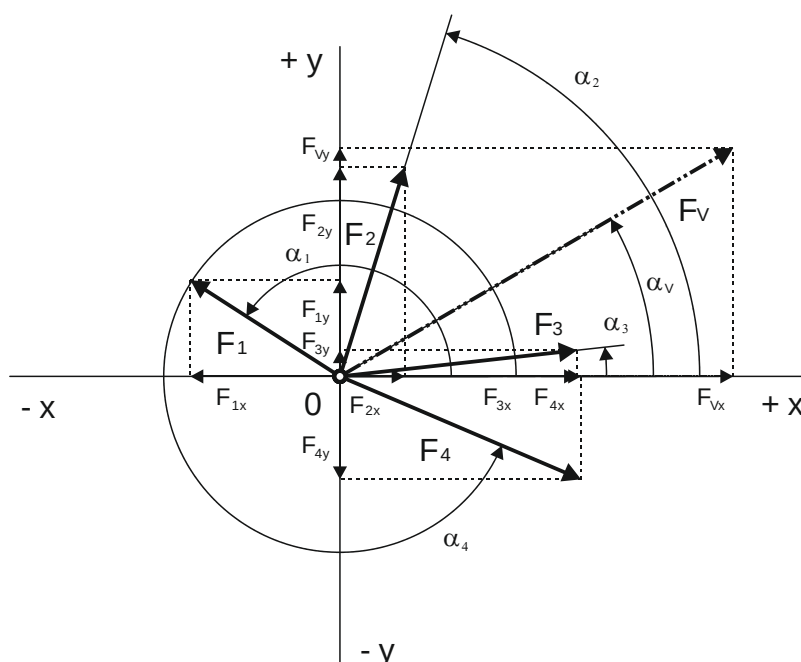
4.5.3 Graficky – rozkladem sil do os x a y

Nejprve rozložíme zadané síly do směrů os x a y a získáme tak patřičné složky. Tyto pak v jednotlivých směrech sečteme a z takto získaných složek výslednice určíme pomocí silového rovnoběžníku celkovou výslednici zadané soustavy sil.



Obr. 10 Určení výslednice soustavy sil se společným působištěm graficky – rozkladem sil do os x a y.

4.5.4 Početně – rozkladem sil do os x a y



Obr. 11 Určení výslednice soustavy sil se společným působištěm poččetně – rozkladem sil do os x a y.

Nejprve rozložíme zadané síly do os x a y a zjistíme velikost jednotlivých složek v obou směrech:

$$\cos \alpha_1 = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1$$

$$\dots F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$\dots F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2$$

$$\dots F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3$$

$$\dots F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3$$

$$\dots F_{4x} = F_4 \cdot \cos \alpha_4$$

$$\dots F_{4y} = F_4 \cdot \sin \alpha_4$$

...

...

Poté sečteme jednotlivé složky ve směru osy x a y:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + \dots + F_{ix} \quad (11)$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + \dots + F_{iy} \quad (12)$$

přičemž je nutné dávat pozor na znaménka určující smysl jednotlivých složek!

Velikost výslednice určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$F_V = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (13)$$

a úhel sklonu výslednice od směru osy x je dán vztahem:

$$\tan \alpha_V' = \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|} \quad (14)$$

Pro výsledné složky a výslednici pak platí:

Znaménko složky výslednice $\sum F_x$	Znaménko složky výslednice $\sum F_y$	Poloha výslednice F_V v souřadném systému	Úhel sklonu α_V výslednice F_V od kladného směru osy x
+	+	I. kvadrant	$\alpha_V = \alpha_V'$
-	+	II. kvadrant	$\alpha_V = 180^\circ - \alpha_V'$
-	-	III. kvadrant	$\alpha_V = 180^\circ + \alpha_V'$
+	-	IV. kvadrant	$\alpha_V = 360^\circ - \alpha_V'$

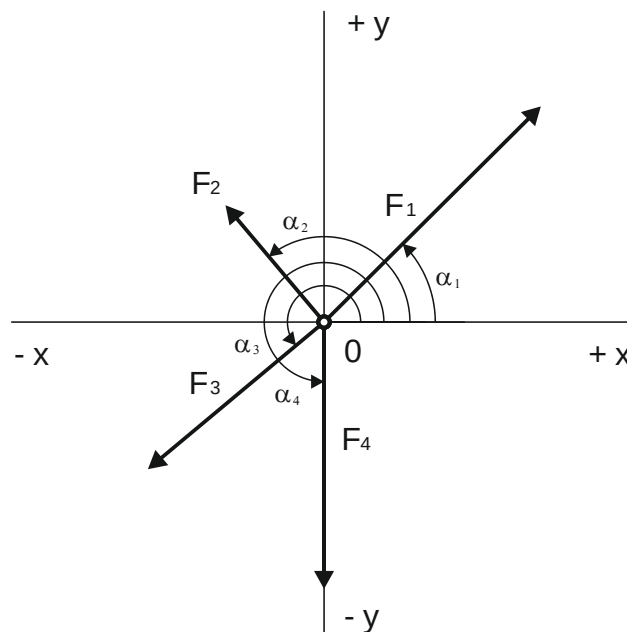
Tab. 1 Stanovení polohy výslednice a jejího sklonu od kladného směru osy x.

Příklad:

Určete početně a graficky směr, smysl a velikost výslednice F_v u zadané soustavy sil se společným působištěm.

Zadané hodnoty:

$$F_1 (0,0;45^\circ;400N) \quad F_2 (0,0;130^\circ;200N) \quad F_3 (0,0;220^\circ;300N) \quad F_4 (0,0;270^\circ;350N)$$

**Řešení početní:**

Určení složek zadaných sil ve směru osy x a y:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 400N \cdot \cos 45^\circ = 282,8N$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 200N \cdot \cos 130^\circ = -128,6N$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 300N \cdot \cos 220^\circ = -229,8N$$

$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 350N \cdot \cos 270^\circ = 0N$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 400N \cdot \sin 45^\circ = 282,8N$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 200N \cdot \sin 130^\circ = 153,2N$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 300N \cdot \sin 220^\circ = -192,8N$$

$$F_{4y} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 350N \cdot \sin 270^\circ = -350N$$

Určení velikostí složek výslednice ve směru osy x a y:

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 282,8N - 128,6N - 229,8N + 0N = -75,6N$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 282,8N + 153,2N - 192,8N - 350N = -106,8N$$

Z výsledků je patrné, že výslednice soustavy sil F_v se bude nacházet ve III. kvadrantu.

Určení velikosti výslednice soustavy sil F_v :

$$F_v = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{(-75,6N)^2 + (-106,8N)^2} = 130,8N$$

Určení sklonu výslednice soustavy sil α_v od kladného směru osy x:

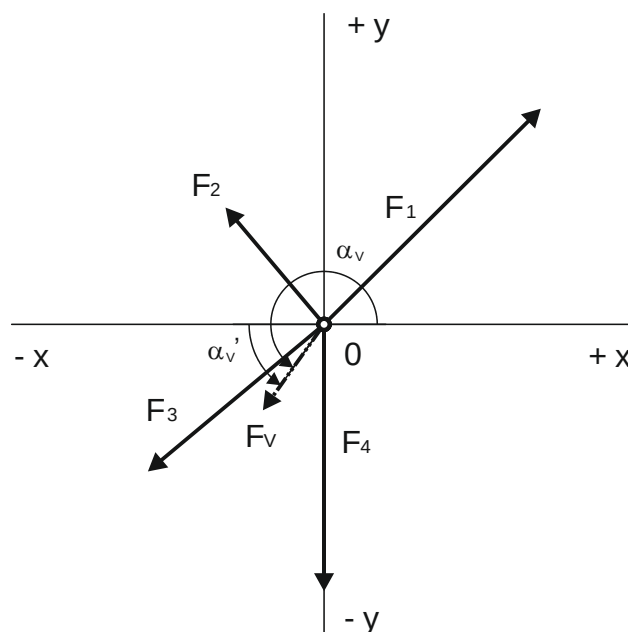
Nejprve určíme sklon výslednice α_v' od směru osy x.

$$\tan \alpha_v' = \frac{|\Sigma F_y|}{|\Sigma F_x|} = \frac{106,8N}{75,6N} = 1,413 \Rightarrow \alpha_v' = 54^\circ 42'$$

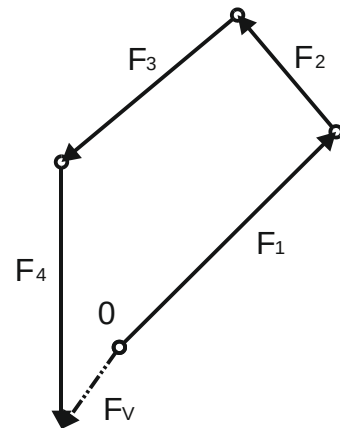
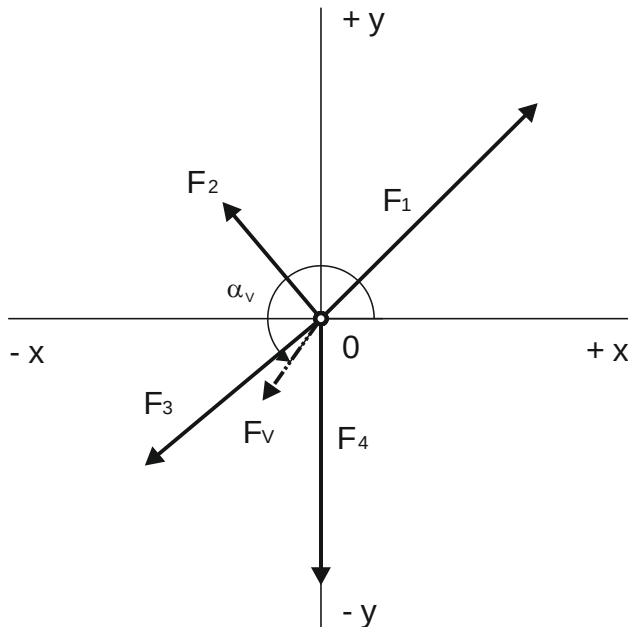
Jelikož výslednice soustavy sil F_v se nachází ve III. kvadrantu, úhel sklonu výslednice soustavy sil α_v od kladného směru osy x bude roven:

$$\alpha_v = 180^\circ + \alpha_v' = 180^\circ + 54^\circ 42' = 234^\circ 42'$$

Grafické znázornění výsledků početního řešení:



Měřítko sil $m_F = 10N.mm^{-1}$

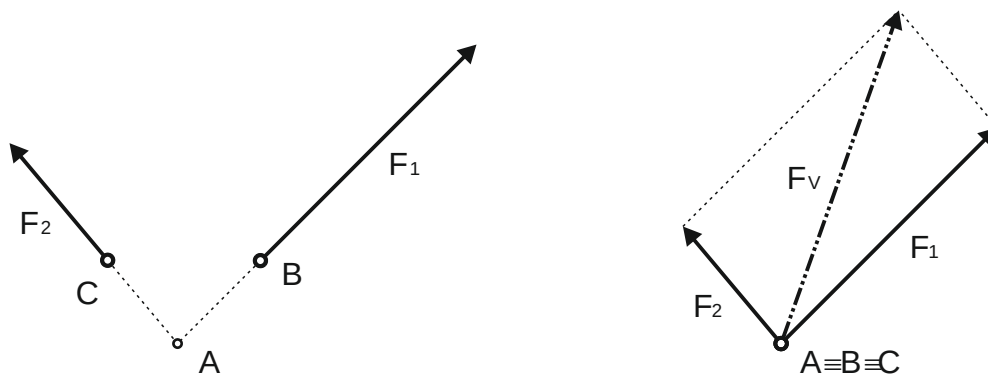
Řešení grafické:*Měřítko sil $m_F = 10\text{N.mm}^{-1}$* 

$$F_V = m_F \cdot l_F = 10\text{N.mm}^{-1} \cdot 13\text{mm} = 130\text{N}$$

$$\alpha_V = 234^\circ$$

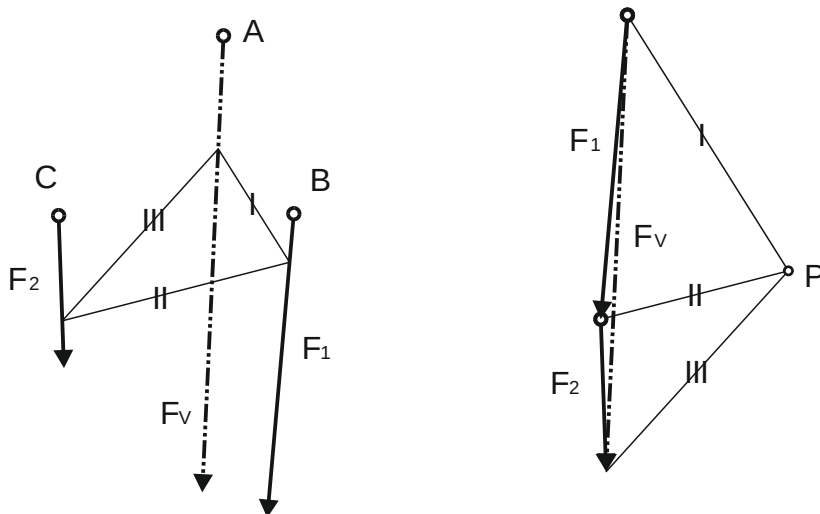
4.6 Určení výslednice sil, jež nemají společné působíště**4.6.1 Výslednice dvou různoběžných sil**

Na obr. 12 jsou dány dvě síly F_1 a F_2 , které nemají společné působíště. Použijeme pravidlo, že síly je možné libovolně posouvat po nositelce aniž by se měnil jejich účinek a posuneme je na místo společného působíště A. Výslednici takovýchto sil F_V , pak zjistíme některou ze dříve zmíněných metod.



Obr. 12 Určení výslednice dvou různoběžných sil.

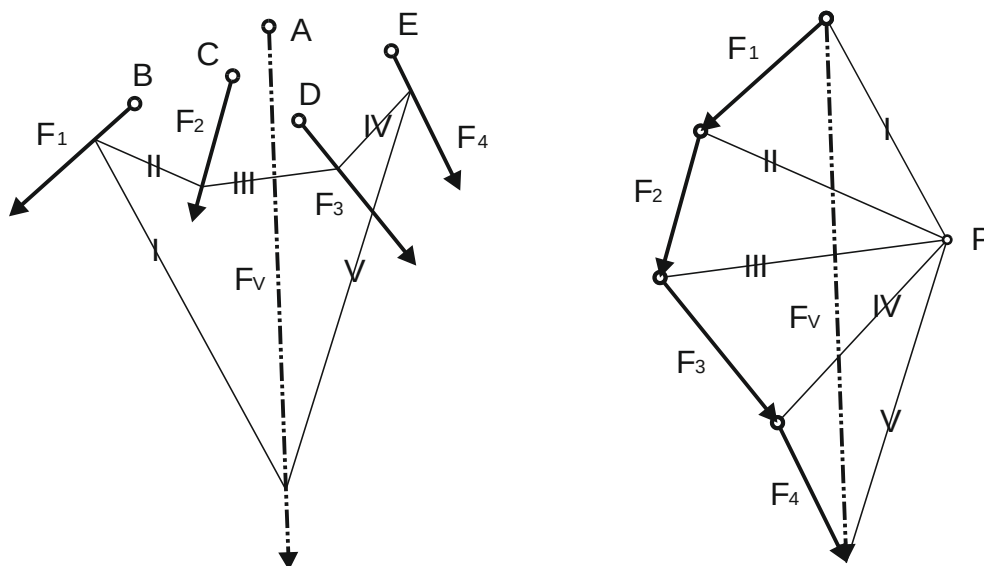
Pokud je průsečík vyšetřovaných sil příliš vzdálený, použijeme pro řešení výslednice sil tzv. **vláknový obrazec** (viz. obr. 13). Nejprve složíme graficky zadané síly čímž určíme směr, smysl a velikost výslednice F_V . Počátek výslednice je totožný s počátkem první vynášené síly a konec výslednice je totožný s koncem poslední vynášené síly. Pak zvolíme libovolný bod P (tzv. pól vláknového obrazce) a z něj vedeme paprsky na začátky a konce vynášených sil vláknového obrazce. Paprsky označíme (nejlépe v pořadí vynášených sil) a přeneseme jejich rovnoběžky se stejným značením do obrazce se zadanými silami. Přičemž na nositelkách vyšetřovaných sil se protínají vždy ty paprsky, které vedou na počátek a konec patřičné síly ve vláknovém obrazci. Průsečík vlákna počátku první vynášené síly a vlákna konce poslední vynášené síly je místem nositelky výslednice F_V .



Obr. 13 Určení výslednice dvou různoběžných sil graficky, pomocí vláknového obrazce. Vlevo je znázorněno zadání působících sil a řešení polohy výslednice sil, vpravo je pak znázorněn vláknový obrazec.

4.6.2 Výslednice soustavy různoběžných sil

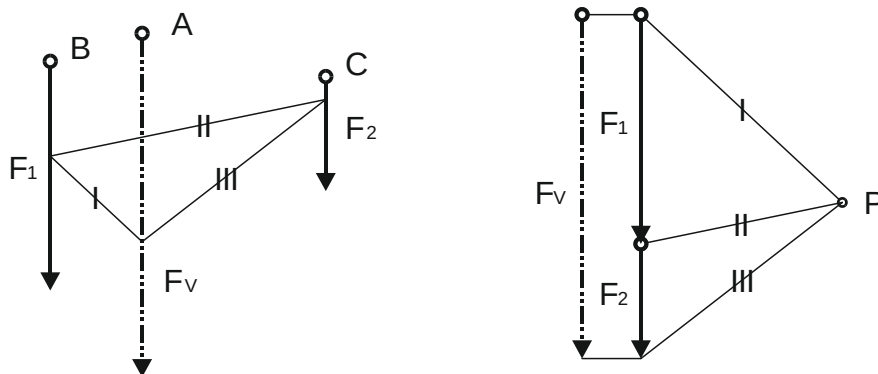
Vláknový obrazec lze použít i pro řešení výslednice F_V většího počtu různoběžných sil (viz. obr. 14).



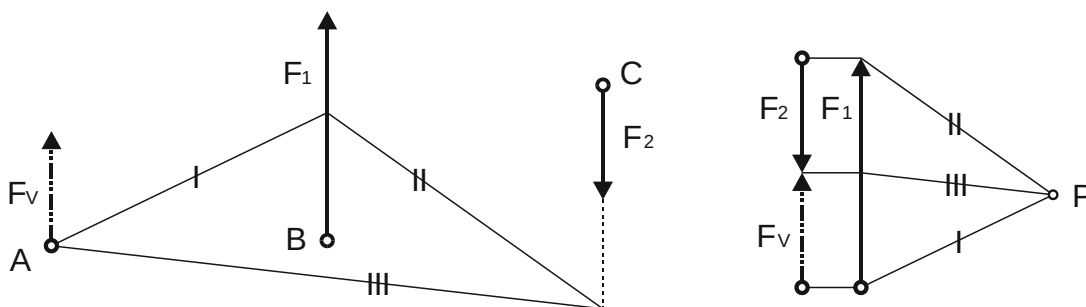
Obr. 14 Určení výslednice soustavy různoběžných sil graficky, pomocí vláknového obrazce.

4.6.3 Výslednice dvou rovnoběžných sil

Soustava dvou rovnoběžných sil má společné působíště v nekonečnu. Výslednici takovéto soustavy sil zjistíme graficky stejným způsobem jako u soustavy dvou různoběžných sil a to pomocí vláknového obrazce (viz obr. 15 a 16).



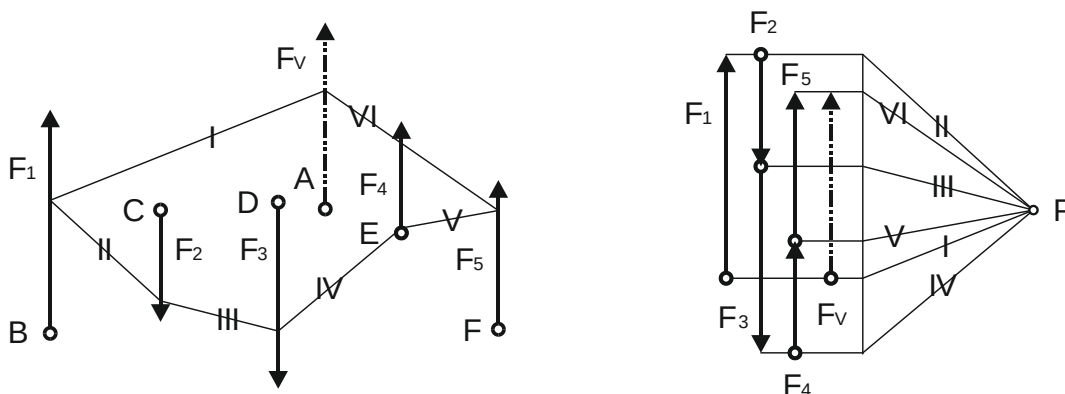
Obr. 15 Určení výslednice dvou rovnoběžných sil graficky, pomocí vláknového obrazce. Zadané síly mají stejný směr i smysl.



Obr. 16 Určení výslednice dvou rovnoběžných sil graficky, pomocí vláknového obrazce. Zadané síly mají stejný směr, ale opačný smysl.

4.6.4 Výslednice soustavy rovnoběžných sil

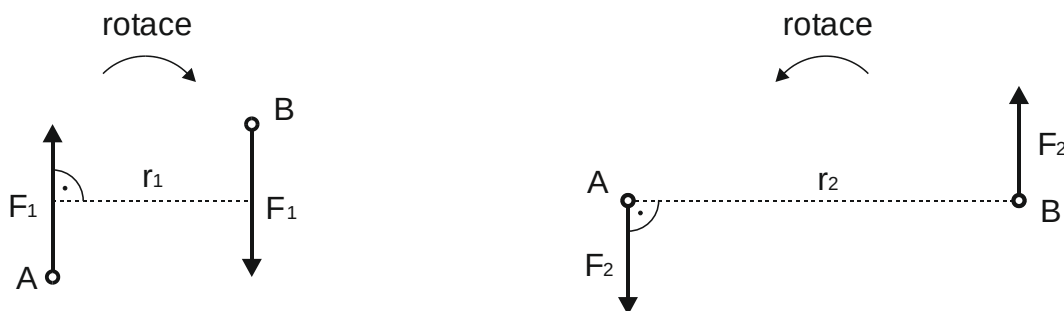
K určení výslednice takovéto soustavy sil opět použijeme vláknový obrazec (viz obr. 17). Důležité je pak při řešení dávat pozor na správný sled paprsků vláknového obrazce při určování polohy nositelky výslednice F_v a to zejména, když zadané síly nemají stejný smysl.



Obr. 17 Určení výslednice soustavy rovnoběžných sil graficky, pomocí vláknového obrazce.

4.7 Silová dvojice a její moment

Dvě stejně velké síly vzájemně rovnoběžné, ale opačného smyslu tvoří tzv. **silovou dvojici**. Výslednice silové dvojice je rovna nule. Účinek silové dvojice má rotační charakter a smysl rotace je dán polohou sil (viz obr. 18).



Obr. 18 Grafické znázornění silových dvojic.

Rotační účinek silové dvojice závisí na velikosti sil a na jejich vzájemné kolmé vzdálenosti r . Součin těchto veličin se nazývá **moment silové dvojice**.

$$M = F \cdot r \quad (N \cdot mm; N \cdot m) \quad (15)$$

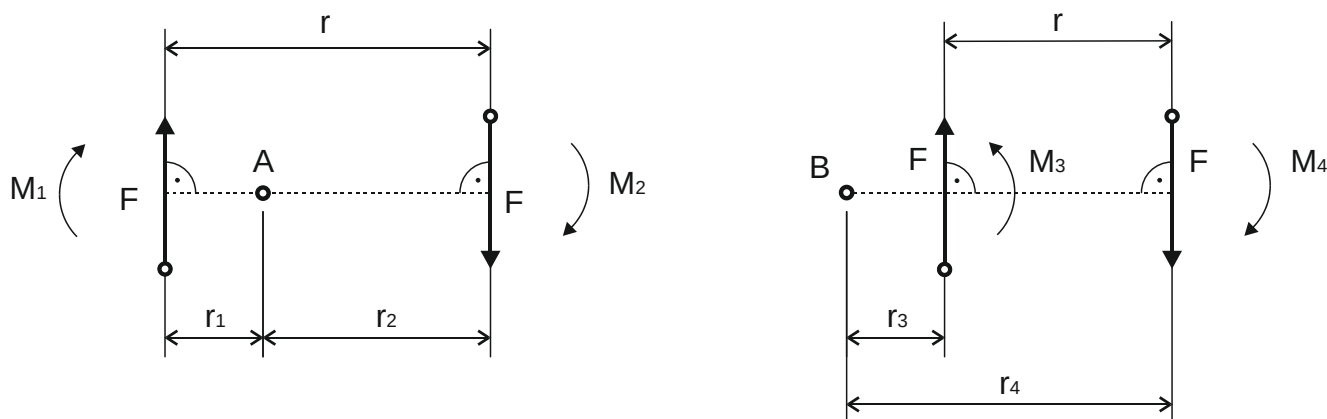
Smysl působení momentu považujeme za kladný pokud je v protisměru pohybu hodinových ručiček a za záporný pokud je ve směru pohybu hodinových ručiček. **Moment silové dvojice má konstantní hodnotu vzhledem k jakémukoliv bodu roviny v níž silová dvojice leží** (viz obr. 19).

Vzhledem k bodu A platí:

$$M_A = M_1 + M_2 = F \cdot r_1 + F \cdot r_2 = F \cdot (r_1 + r_2) = F \cdot r = M \quad (16)$$

Vzhledem k bodu B platí:

$$M_B = M_3 + M_4 = -F \cdot r_3 + F \cdot r_4 = F \cdot (r_4 - r_3) = F \cdot r = M \quad (17)$$



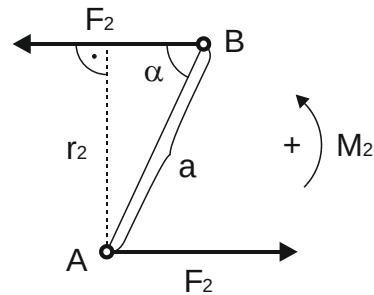
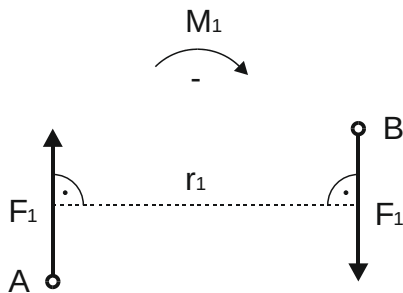
Obr. 19 Moment silové dvojice.

Příklad:

Určete velikost a smysl působení momentů (vyjádřený znaménkem) u zadaných silových dvojic.

$$F_1 = 20\text{N}, r_1 = 40\text{mm}$$

$$F_2 = 25\text{N}, a = 30\text{mm}, \alpha = 65^\circ$$

**Řešení:**

$$M_1 = F_1 \cdot r_1 = 20\text{N} \cdot 40\text{mm} = 800\text{N} \cdot \text{mm} (-)$$

$$M_2 = F_2 \cdot r_2 = F_2 \cdot a \cdot \sin \alpha = 25\text{N} \cdot 30\text{mm} \cdot \sin 65^\circ = 679,7\text{N} \cdot \text{mm} (+)$$

Příklad:

Nahradte silovou dvojicí $F_1 = 20\text{N}$, $r_1 = 40\text{mm}$ silovou dvojicí jejíž síly jsou $F_2 = 25\text{N}$. Jak velké bude rameno r_2 ?

Řešení:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{F_1 \cdot r_1}{F_2} = \frac{20\text{N} \cdot 40\text{mm}}{25\text{N}} = 32\text{mm}$$

Momenty silových dvojic ležící v jedné rovině **můžeme sčítat**, přičemž je nutné respektovat znaménko dílčích momentů silových dvojic.

Příklad:

Jsou zadány následující dvojice sil:

$$F_1 = 50\text{N}, r_1 = 45\text{mm}$$

$$F_2 = 30\text{N}, r_2 = 40\text{mm}$$

$$F_3 = -60\text{N}, r_3 = 30\text{mm}$$

Určete velikost výsledné dvojice sil F jejíž rameno $r = 100\text{mm}$.

Řešení:

$$M_1 = F_1 \cdot r_1 = 50\text{N} \cdot 45\text{mm} = 2250\text{N} \cdot \text{mm}$$

$$M_2 = F_2 \cdot r_2 = 30\text{N} \cdot 40\text{mm} = 1200\text{N} \cdot \text{mm}$$

$$M_3 = F_3 \cdot r_3 = -60N \cdot 30mm = -1800N \cdot mm$$

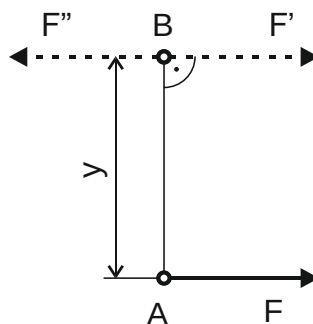
$$M = M_1 + M_2 + M_3 = 2250N \cdot mm + 1200N \cdot mm - 1800N \cdot mm = 1650N \cdot mm$$

$$M = F \cdot r \Rightarrow F = \frac{M}{r} = \frac{1650N \cdot mm}{100mm} = 16,5N$$

Z výsledku je zřejmé, že moment výsledné dvojice sil bude mít kladný smysl působení.

4.8 Přeložení účinku síly do jiného působíště

Přeložení účinku síly F z působíště A do působíště B provedeme tak, že v bodě B doplníme dvě síly, pro které platí $F' = F'' = F$. Tyto dvě síly mají totožný směr (rovnoběžný se silou F), ale opačný smysl (viz obr. 20). **V novém působíšti B má tedy síla F účinek v podobě síly F' a silové dvojice $F - F''$, která tvoří moment síly o velikosti $M = F \cdot y$.**



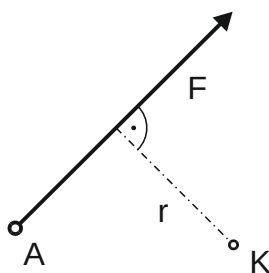
Obr. 20 Princip přeložení účinku síly do jiného působíště.

4.9 Moment síly vzhledem k bodu

Moment síly F vzhledem k libovolnému bodu K je roven součinu velikosti síly F a kolmé vzdálenosti r mezi nositelkou síly a bodem K .

$$M = F \cdot r$$

(18)



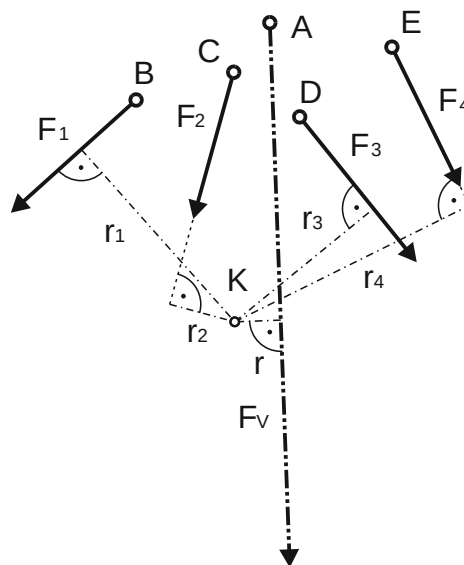
Obr. 21 Určení momentu síly vzhledem k bodu K .

4.10 Moment soustavy sil vzhledem k bodu

Momentová věta

Působí-li na těleso soustava sil, pak její výsledný moment k libovolnému bodu je roven součtu dílčích momentů jednotlivých sil a také momentu výslednice soustavy sil k témuž bodu.

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + \dots + F_n \cdot r_n = F_V \cdot r \quad (19)$$



Obr. 22 Moment soustavy sil vzhledem k bodu K.

Příklad:

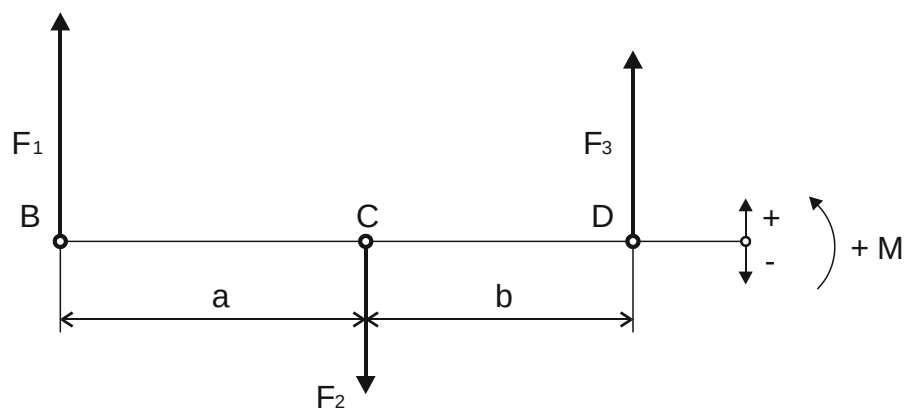
Vypočítejte velikost výslednice soustavy rovnoběžných sil F_V a určete její vzdálenost r k bodu B. K řešení úlohy využijte momentovou větu.

Zadané hodnoty:

$$F_1 = 300\text{N}$$

$$F_2 = 200\text{N}, a = 40\text{mm}$$

$$F_3 = 250\text{N}, b = 35\text{mm}$$



Řešení:

Velikost výslednice F_V

$$F_V = F_1 - F_2 + F_3 = 300\text{N} - 200\text{N} + 250\text{N} = 350\text{N}$$

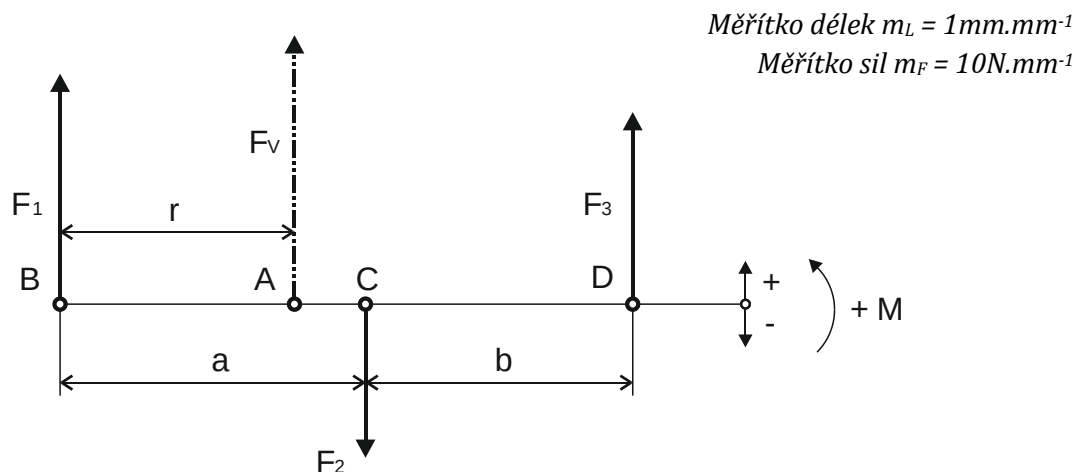
Velikost výsledného momentu zadané soustavy sil k bodu B

$$M_B = F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a + b) = 300\text{N} \cdot 0\text{mm} - 200\text{N} \cdot 40\text{mm} + 250\text{N} \cdot (40\text{mm} + 35\text{mm}) = 10750\text{N} \cdot \text{mm}$$

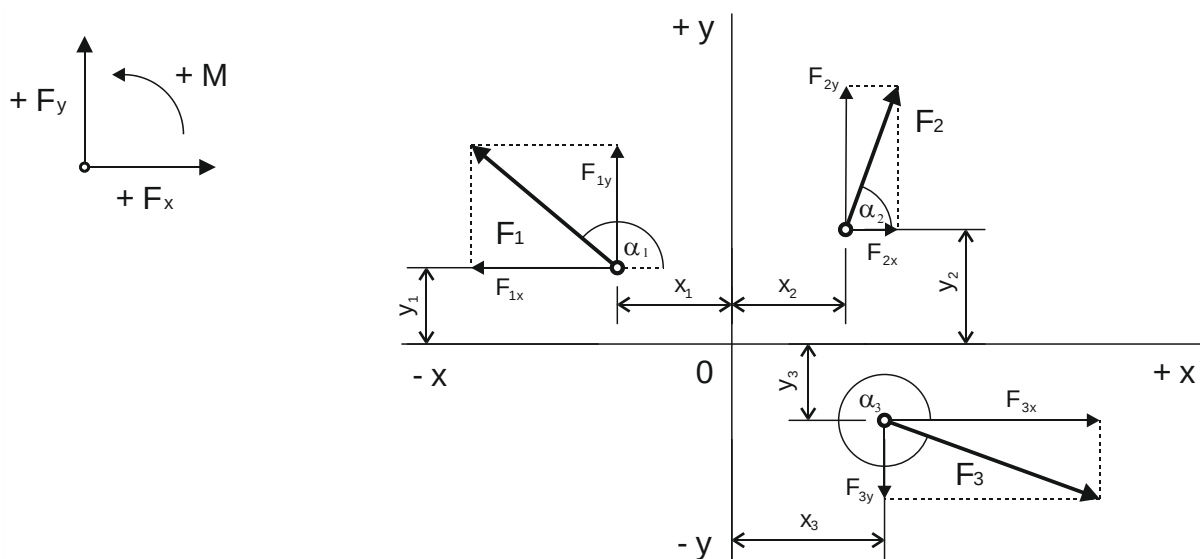
Rameno výslednice r

$$r = \frac{M_B}{F_V} = \frac{10750\text{N} \cdot \text{mm}}{350\text{N}} = 30,7\text{mm}$$

Grafické znázornění řešení:

**Příklad:**

Vypočítejte velikost výslednice soustavy různoběžných sil F_V a určete její vzdálenost r k bodu 0. K řešení úlohy využijte momentovou větu.



Zadané hodnoty:

$$F_1 (-15,10;140^\circ;250N)$$

$$F_2 (15,15;70^\circ;200N)$$

$$F_3 (20,-10;340^\circ;300N)$$

Řešení:

Velikost složky výslednice F_{Vx}

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 = \\ &= 250N \cdot \cos 140^\circ + 200N \cdot \cos 70^\circ + 300N \cdot \cos 340^\circ = -191,5N + 68,4N + 281,9N = 158,8N \end{aligned}$$

Velikost složky výslednice F_{Vy}

$$\begin{aligned} F_{Vy} &= \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3 = \\ &= 250N \cdot \sin 140^\circ + 200N \cdot \sin 70^\circ + 300N \cdot \sin 340^\circ = 160,7N + 187,9N - 102,6N = 246N \end{aligned}$$

Jelikož F_{Vx} a F_{Vy} mají kladné hodnoty, pak síla F_V leží v I. kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v působišti výslednice soustavy sil.

Velikost úhlu α_V

$$\tan \alpha_V = \frac{|F_{Vy}|}{|F_{Vx}|} = \frac{246N}{158,8N} = 1,549 \Rightarrow \alpha_V = 57^\circ 09'$$

Velikost výslednice F_V

$$F_V = \sqrt{F_{Vx}^2 + F_{Vy}^2} = \sqrt{158,8N^2 + 246N^2} = 292,8N$$

Velikost výsledného momentu zadané soustavy sil k bodu 0

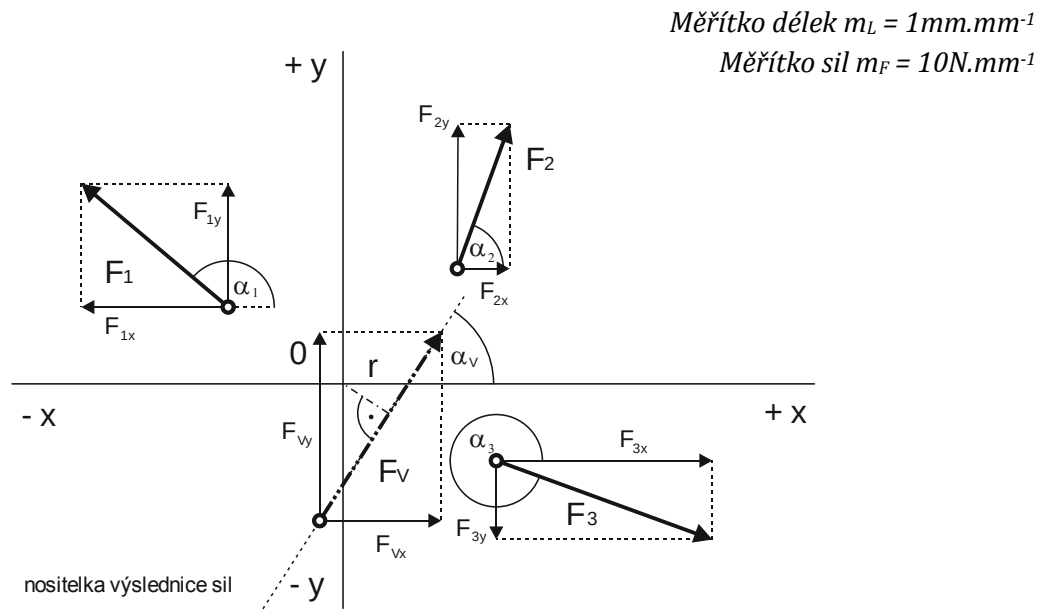
$$\begin{aligned} M_0 &= F_{1x} \cdot y_1 - F_{1y} \cdot x_1 - F_{2x} \cdot y_2 + F_{2y} \cdot x_2 + F_{3x} \cdot y_3 - F_{3y} \cdot x_3 = \\ &= |F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot y_1| - |F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot x_1| - |F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot y_2| + |F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot x_2| + |F_3 \cdot \cos \alpha_3 \cdot y_3| - |F_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot x_3| = \\ &= |250N \cdot \cos 140^\circ \cdot 10mm| - |250N \cdot \sin 140^\circ \cdot (-15)mm| - |200N \cdot \cos 70^\circ \cdot 15mm| + \\ &+ |200N \cdot \sin 70^\circ \cdot 15mm| + |300N \cdot \cos 340^\circ \cdot (-10)mm| - |300N \cdot \sin 340^\circ \cdot 20mm| = 2064,6N \cdot mm \end{aligned}$$

Přičemž absolutní hodnoty dílčích momentů zaručí, že velikost výsledného momentu nebude ovlivněna znaménky souřadnic polohy působišť zadaných sil a znaménky funkcí sinus a cosinus pro úhly sklonu sil F_1 až F_3 od kladného směru osy x.

Rameno výslednice r

$$r = \frac{M_0}{F_V} = \frac{2064,6N \cdot mm}{292,8N} = 7,1mm$$

Grafické znázornění řešení:



5. ROVNOVÁHA SIL

Soustava sil působících na těleso je v rovnováze, je-li jejich výslednice rovna nule a současně je součet všech momentů sil k libovolnému bodu tělesa také nulový.

$$\mathbf{F}_V = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (20)$$

a

$$\Sigma M = 0 \quad (21)$$

Těleso je pak při působení rovnovážné silové soustavy v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrným rotačním, či translačním pohybem.

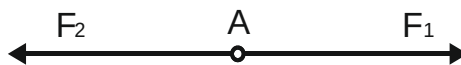
5.1 Rovnováha sil se společným působišťem

Působí-li dvě síly F_1 a F_2 ve stejném směru, ale mají opačný smysl (viz obr.), platí pro jejich rovnováhu vztah:

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad F_1 = F_2$$

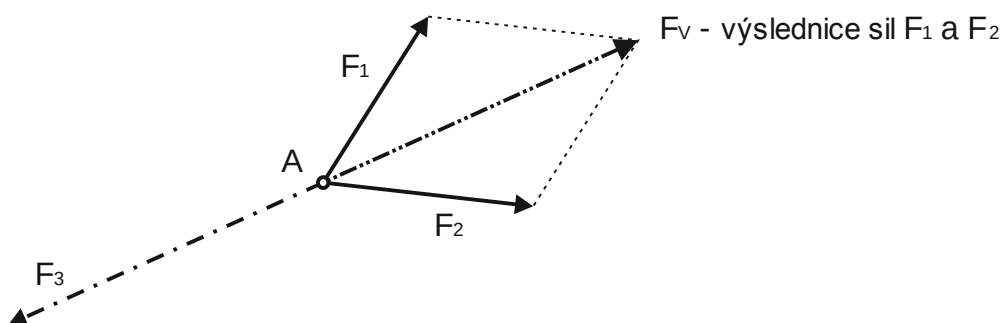
použijeme-li vektorovou symboliku:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \mathbf{0}$$



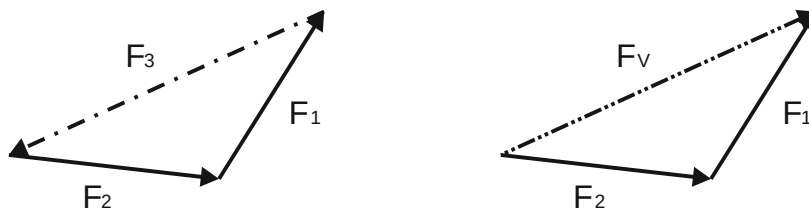
Obr. 23 Rovnováha dvou sil působících ve stejném směru a mající opačný smysl.

Chceme-li uvést do rovnováhy dvě síly působící ve společném bodě a mající různý směr, tak nejprve určíme jejich výslednici. Uvedení do rovnováhy poté provedeme přidáním další síly, která bude stejně velká jako výslednice a bude mít stejný směr, ale její smysl bude opačný.



Obr. 24 Rovnováha sil působících v jednom bodě v různých směrech.

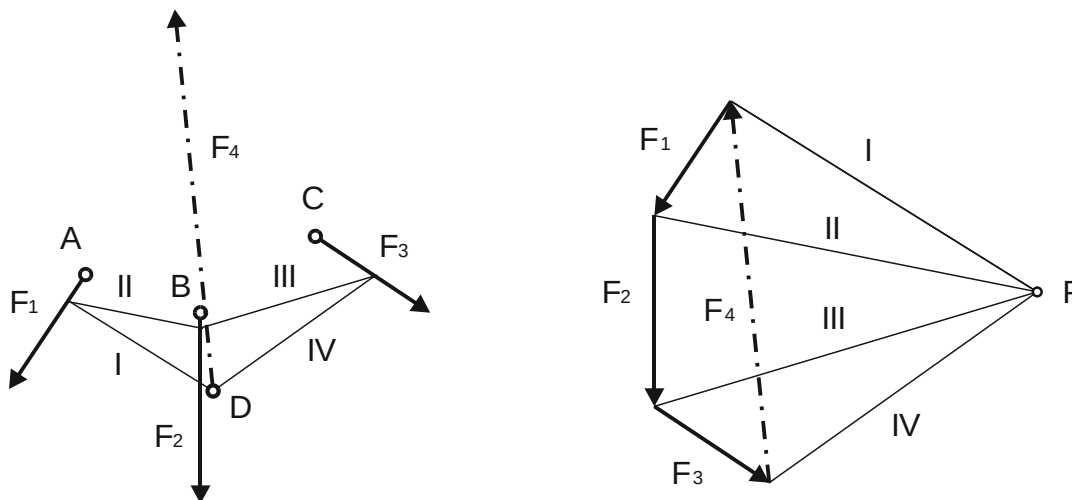
Soustava různoběžných sil je v rovnováze, pokud je silový obrazec uzavřen v jednom smyslu a výsledný moment je roven nule.



Obr. 25 Rovnováha sil působících v jednom bodě v různých směrech.

5.2 Rovnováha soustavy sil, jež nemají společné působíště

Pravidlo o uzavřeném silovém obrazci pro rovnovážný stav platí pro jakoukoliv obecnou soustavu sil (viz obr. 26). Síla F_4 je přidavnou silou, kterou je uvedena soustava sil do rovnováhy. Výslednice takovéto soustavy sil F_v má pak stejný směr i velikost, ale opačný smysl.



Obr. 26 Rovnováha soustavy sil, jež nemají společné působíště.

5.3 Síly zátěžné a síly vazbové (reakce)

Síly zatěžující těleso (součást, konstrukci) se nazývají **síly zátěžné**. V místech uchycení (podepření, zavěšení, uložení atd.) tělesa, vznikají **síly vazbové** neboli **reakce**. Síly vazbové a zátěžné jsou v rovnováze a jejich výslednice je tedy rovna nule.

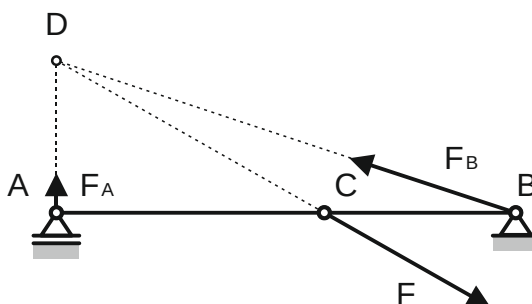
$$\vec{F}_V = \vec{\Sigma F} + \vec{\Sigma F_R} = 0 \quad (22)$$

kde:

$\vec{\Sigma F}$ je vektorový součet sil zátěžných

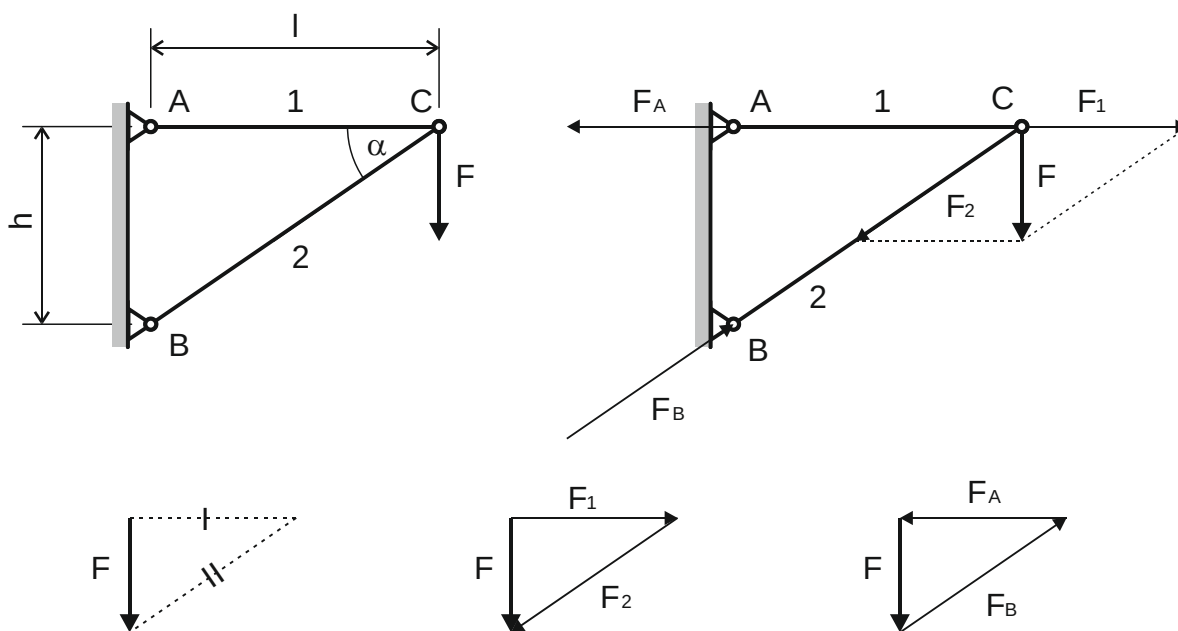
$\vec{\Sigma F_R}$ je vektorový součet sil vazbových neboli reakcí

Při určování směru, smyslu a velikosti reakcí využíváme početní i grafické metody. Směr reakcí přitom závisí na způsobu uchycení. Na obr. 27 je znázorněn nosník na dvou podporách z nichž pravá podpora je otočná a levá je z důvodu dilatace posuvná. Reakce otočné podpory má směr obecný, reakce posuvné podpory je vždy kolmá na podložku. Protože zátěžná síla F je v rovnováze s reakcemi F_A a F_B , musí mít tyto tři síly společný průsečík nosítelek, bod D .



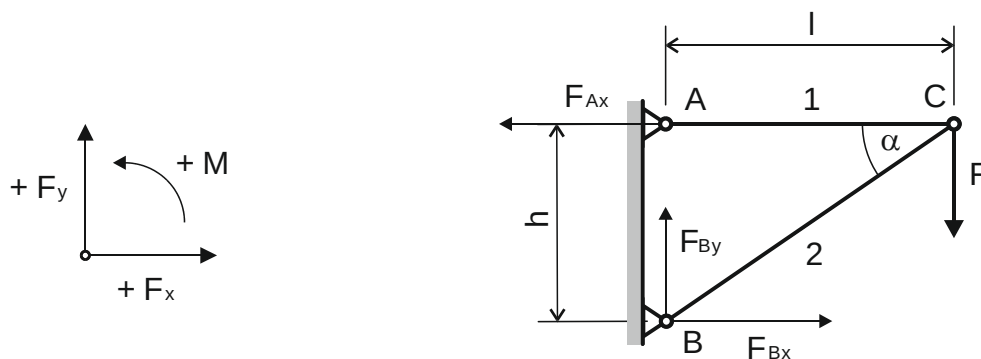
Obr. 27 Síly zátěžné a vazbové působící na nosník o dvou podporách.

Na obr. 28 je znázorněno řešení zatížení prutové konstrukce silou F . Konstrukce je uchycena k rámu pomocí dvou otočných podpor. Grafické řešení spočívá v rozkladu síly F do jednotlivých prutů a následném zjištění směru, smyslu a velikosti reakcí F_A a F_B . Síla F (respektive její složky F_1 a F_2) je v rovnováze s reakcemi F_A a F_B . To znamená, že výslednice sil F , F_A a F_B je nulová. Složka zátěžné síly F_1 namáhá prut 1 na tah a složka zátěžné síly F_2 namáhá prut 2 na tlak (vzpěr). Tyto síly pak slouží ke stanovení potřebného průřezu prutů (dimenzování). Reakce F_A a F_B využijeme k dimenzování uchycení prutové konstrukce. Otázky spojené s problematikou dimenzování posléze řeší nauka o pružnosti a pevnosti.



Obr. 28 Grafické řešení reakcí na prutové konstrukci.

Při řešení této úlohy početní metodou, vycházíme z podmínek rovnováhy. Silové účinky jsou zakresleny na obr. 29. Smysl reakčních sil je předpokládán a vychází ze síly zátěžné. Pokud by tento smysl byl nesprávný, projeví se tato skutečnost záporným znaménkem u výsledku velikosti příslušné reakce určeného z podmínek rovnováhy.



Obr. 29 Silové účinky na prutové konstrukci.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \quad (23)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F + F_{By} = 0 \quad (24)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_B = F_{Ax} \cdot h - F \cdot l = 0 \quad (25)$$

Z rovnice (25) vypočítáme F_{Ax} , z rovnice (24) vypočítáme F_{By} a z rovnice (23) vypočítáme F_{Bx} .

Velikost reakce F_B

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2}$$

Příklad:

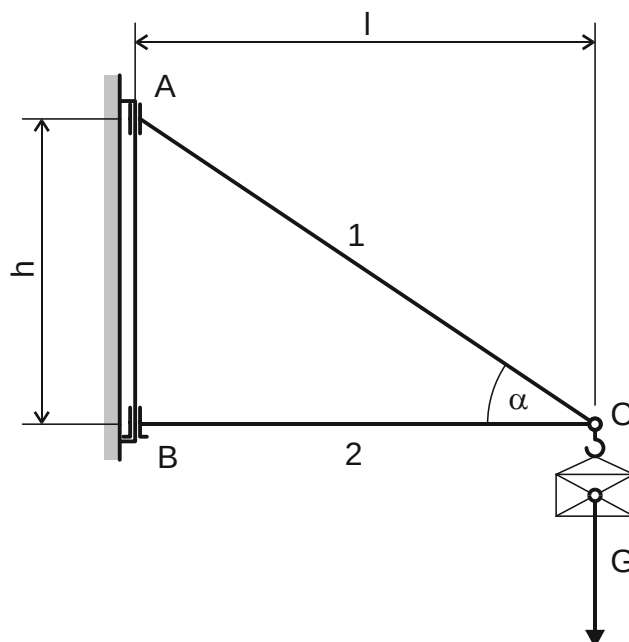
Řešte početně i graficky velikost reakcí F_A a F_B v místech uchycení otočné konzoly. Dále určete síly v prutech F_1 a F_2 potřebné k dimenzování průřezu prutů konzoly.

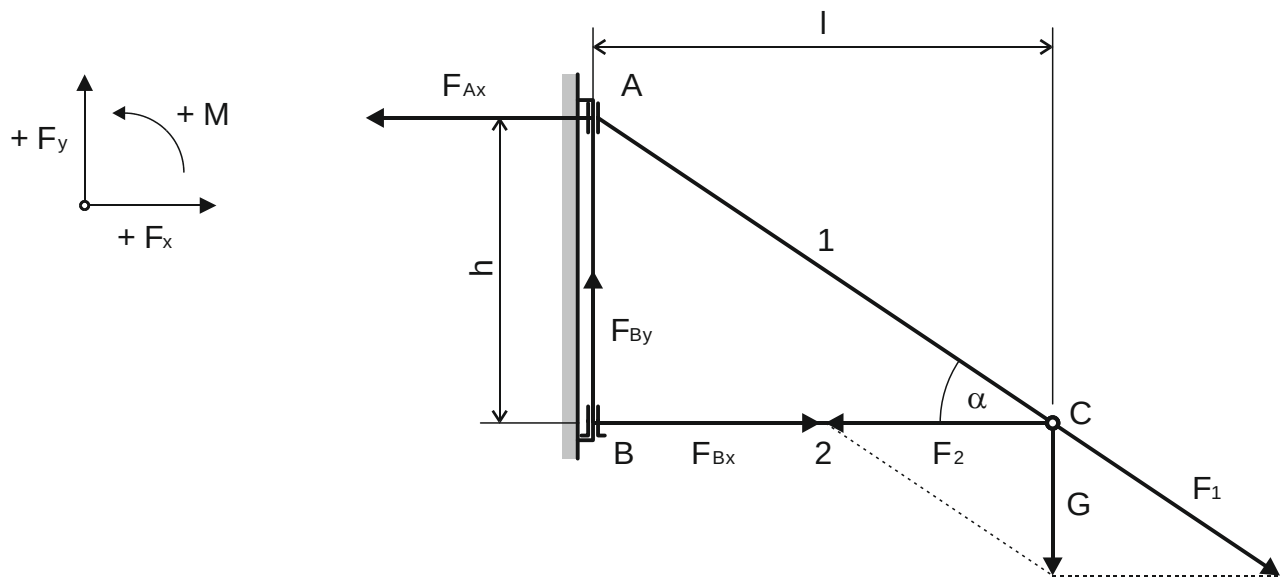
Zadané hodnoty:

hmotnost břemene $m = 800\text{kg}$

vzdálenost ložisek uchycení konzoly $h = 2\text{m}$

vyložení konzoly $l = 3\text{m}$



Řešení početní:

Reakce podpory v místě A je kolmá na podložku, v místě B má směr obecný (tzn. má dvě složky ve směru osy x a y). Tyto předpoklady vychází z charakteru podpor. Předpokládané směry reakcí pak vychází ze směru a smyslu zátěžné síly G.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \quad (26)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-G + F_{By} = 0 \quad (27)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_B = F_{Ax} \cdot h - G \cdot l = 0 \quad (28)$$

Z rovnice (28) vypočítáme F_{Ax} .

$$F_{Ax} = \frac{G \cdot l}{h} = \frac{m \cdot g \cdot l}{h} = \frac{800 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 3 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 12000 \text{ N}$$

Z rovnice (27) vypočítáme F_{By} .

$$F_{By} = G = m \cdot g = 800 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 8000 \text{ N}$$

Z rovnice (26) vypočítáme F_{Bx} .

$$F_{Bx} = F_{Ax} = 12000 \text{ N}$$

Úhel ramen konzoly α

$$\tan \alpha = \frac{h}{l} = \frac{2m}{3m} = 0,667 \Rightarrow \alpha = 33^\circ 41'$$

Velikost síly F_1

$$\sin \alpha = \frac{G}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{m \cdot g}{\sin \alpha} = \frac{800kg \cdot 10m \cdot s^{-2}}{\sin 33^\circ 41'} = 14424,7N$$

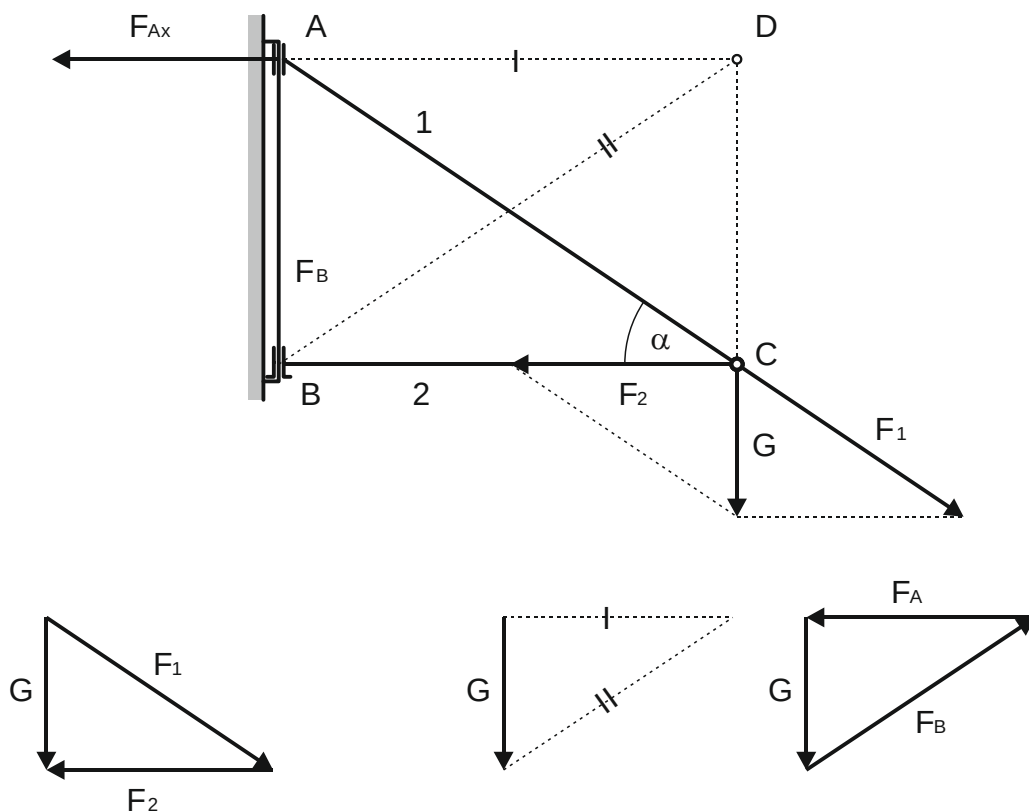
Velikost síly F_2

$$\tan \alpha = \frac{G}{F_2} \Rightarrow F_2 = \frac{G}{\tan \alpha} = \frac{m \cdot g}{\tan \alpha} = \frac{800kg \cdot 10m \cdot s^{-2}}{\tan 33^\circ 41'} = 12000N$$

Řešení grafické:

Nejprve určíme pomocí silového rovnoběžníku velikosti sil F_1 a F_2 , které jsou složkami zátěžné síly G . Směry těchto sil jsou dány směry prutů 1 a 2.

Řešení reakcí F_A a F_B vychází z rovnováhy sil G , F_A a F_B . Nositelka síly F_A je kolmá na podložku (dáno typem podpory) a její průsečík s nositelkou síly G nám určí bod D. Jelikož síly G , F_A a F_B jsou v rovnováze, musí nositelka síly F_B procházet také bodem D. Nyní již známe směry vše tří sil a můžeme tedy doplnit silový obrazec se známou silou G o reakce F_A a F_B .



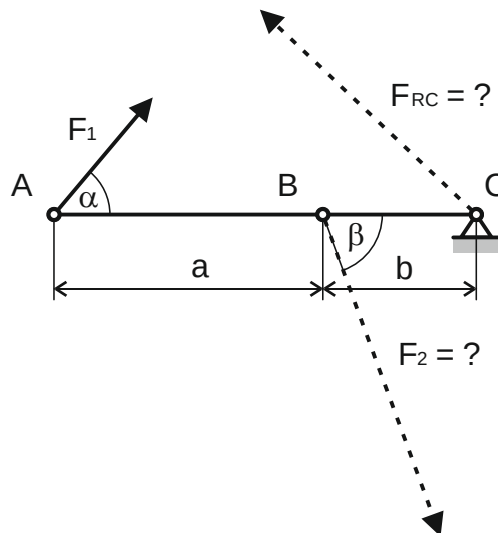
Měřítko délek $m_L = 50mm.mm^{-1}$

Měřítko sil $m_F = 400N.mm^{-1}$

5.4 Rovnováha sil na páce

5.4.1 Jednoramenná páka

U jednoramenné páky s rotační vazbou (viz obr. 30) řešíme rovnováhu mezi vnějšími zátěžnými silami F_1 , F_2 a reakční (vazební) silou F_{RC} , přičemž je možné využít početní i grafickou metodu.

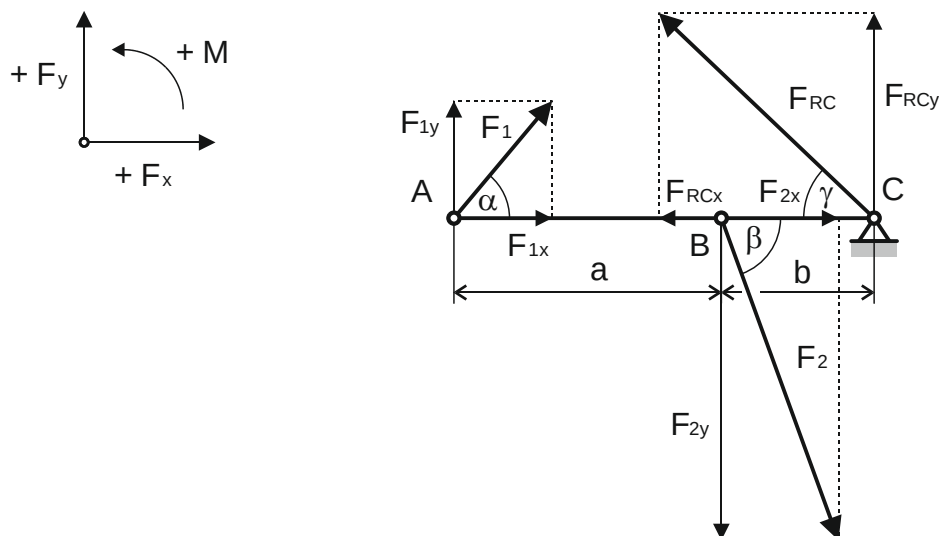


Zadané hodnoty: F_1 , a , b , α , β .

Obr. 30 Silové poměry na jednoramenné páce.

Řešení početní:

Sílu F_1 a předpokládaný směr sil F_2 a F_{RC} rozložíme do směrů os x a y (viz obr. 31)



Obr. 31 Rozklad sil jednoramenné páky.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{1x} + F_{2x} - F_{RCx} = 0$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha + F_{2x} - F_{RCx} = 0 \quad (29)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{1y} - F_{2y} + F_{RCy} = 0$$

$$F_1 \cdot \sin \alpha - F_{2y} + F_{RCy} = 0 \quad (30)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_C = -F_{1y} \cdot (a + b) + F_{2y} \cdot b = -F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) + F_{2y} \cdot b = 0 \quad (31)$$

$$\tan \beta = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} \quad (32)$$

Z rovnice (31) vypočítáme F_{2y} , z rovnice (30) vypočítáme F_{RCy} , rovnice (32) vypočítáme F_{2x} a z rovnice (29) vypočítáme F_{RCx} .

Dále pak:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

$$F_{RC} = \sqrt{F_{RCx}^2 + F_{RCy}^2}$$

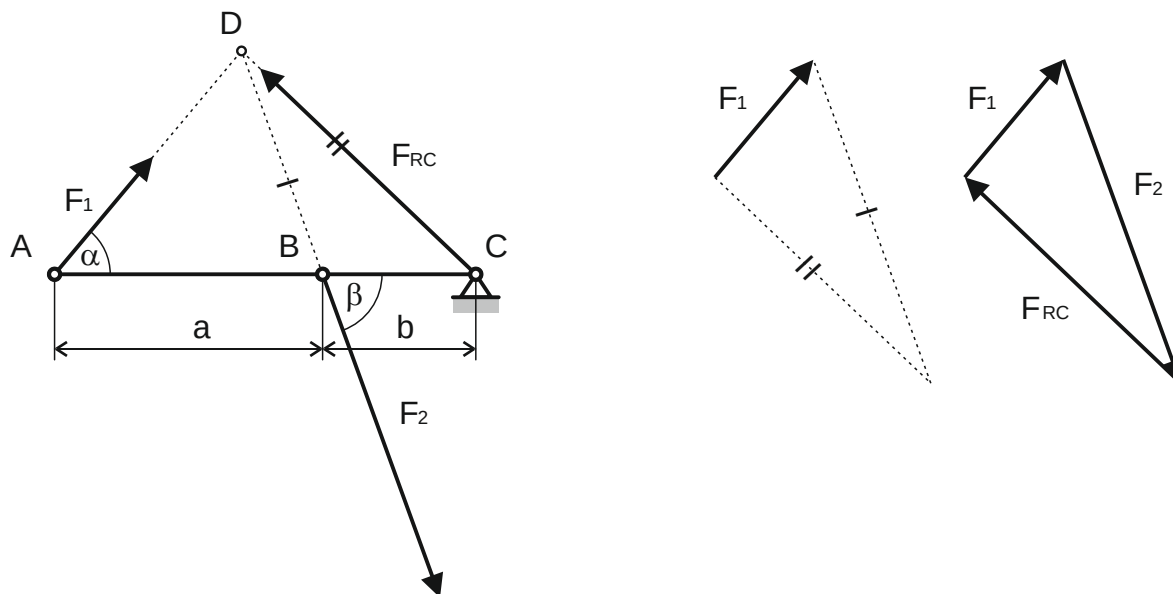
Úhel sklonu reakce γ od osy x je dán vztahem.

$$\tan \gamma = \frac{|F_{RCy}|}{|F_{RCx}|} \Rightarrow \gamma = \dots$$

V jakém kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v působišti síly F_{RC} pak reakce leží, je dáno znaménky složek reakce F_{RCx} a F_{RCy} .

Řešení grafické:

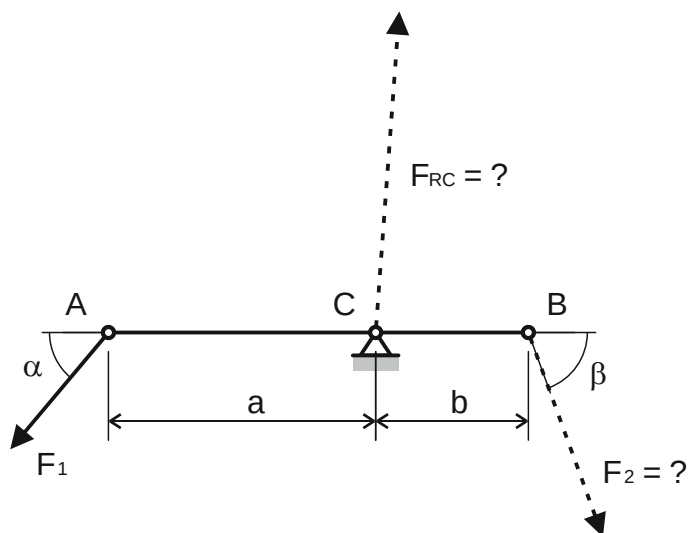
Vnější zátěžné síly F_1 a F_2 jsou v rovnováze s reakcí F_{RC} a mají tedy společný průsečík nositelek, kterým je bod D. Úlohu pak tedy řešíme pomocí silového rovnovážného trojúhelníku.



Obr. 32 Grafické řešení silových poměrů na jednoramenné páce.

5.4.2 Dvouramenná páka

U dvouramenné páky s rotační vazbou (viz obr. 33) řešíme stejně jako u jednoramenné páky rovnováhu mezi vnějšími zátěžnými silami F_1 , F_2 a reakční (vazební) silou F_{RC} , opět je možné využít početní i grafickou metodu.

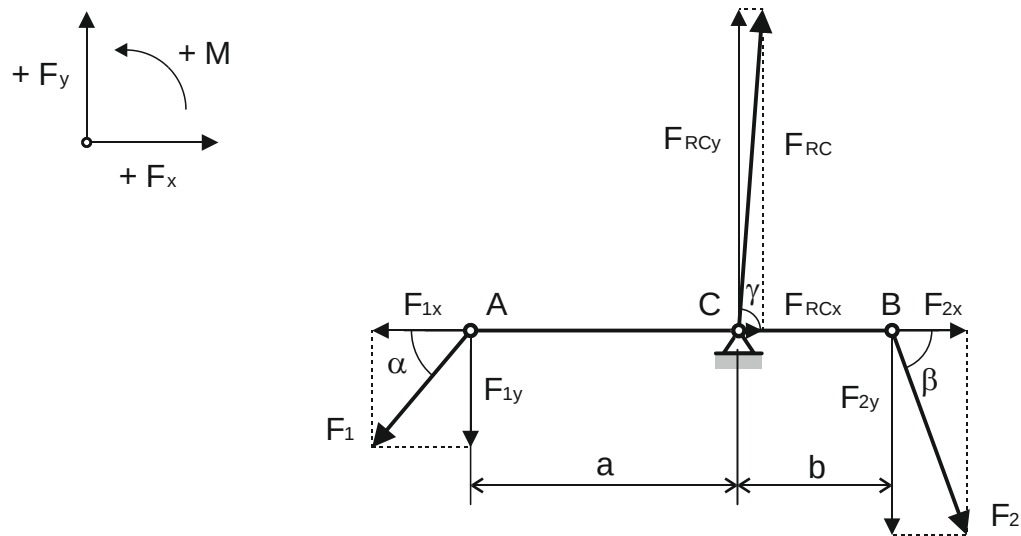


Zadané hodnoty: F_1 , a , b , α , β .

Obr. 33 Silové poměry na dvouramenné páce.

Řešení početní:

Sílu F_1 a předpokládaný směr sil F_2 a F_{RC} rozložíme do směrů os x a y (viz obr. 34)



Obr. 34 Rozklad sil dvouramenné páky.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{1x} + F_{RCx} + F_{2x} = 0$$

$$-F_1 \cdot \cos \alpha + F_{RCx} + F_{2x} = 0 \quad (33)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{1y} + F_{RCy} - F_{2y} = 0$$

$$-F_1 \cdot \sin \alpha + F_{RCy} - F_{2y} = 0 \quad (34)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_C = F_{1y} \cdot a - F_{2y} \cdot b = F_1 \cdot \sin \alpha \cdot a - F_{2y} \cdot b = 0 \quad (35)$$

$$\tan \beta = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} \quad (36)$$

Z rovnice (35) vypočítáme F_{2y} , z rovnice (34) vypočítáme F_{RCy} , rovnice (36) vypočítáme F_{2x} a z rovnice (33) vypočítáme F_{RCx} .

Dále pak:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

$$F_{RC} = \sqrt{F_{RCx}^2 + F_{RCy}^2}$$

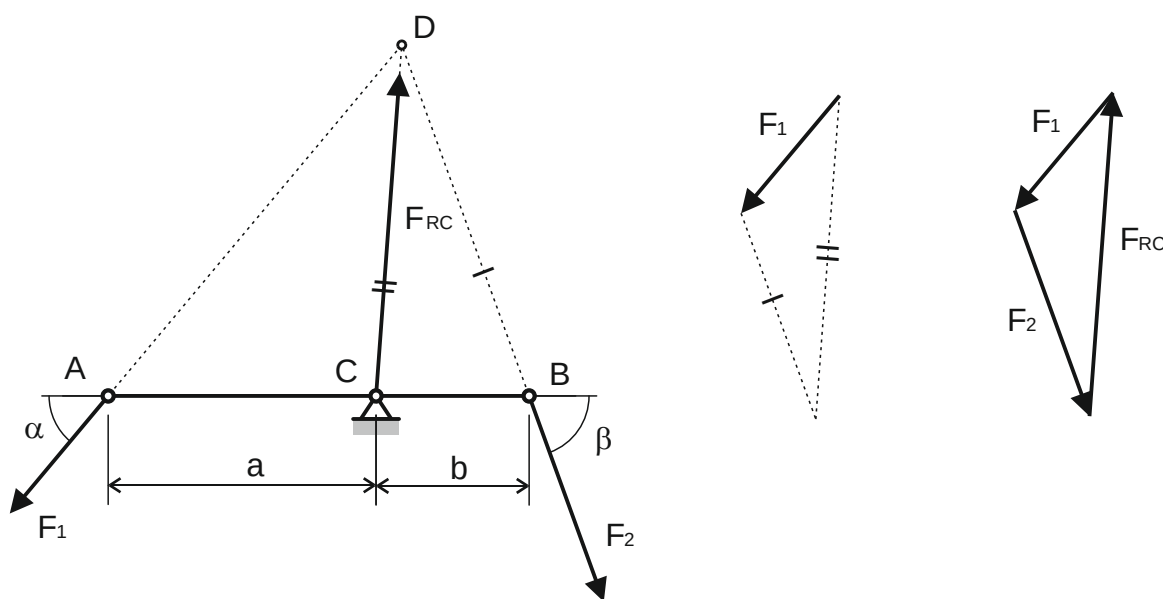
Úhel sklonu reakce γ od osy x je dán vztahem.

$$\tan \gamma = \frac{|F_{RCy}|}{|F_{RCx}|} \Rightarrow \gamma = \dots$$

V jakém kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v působišti síly F_{RC} pak reakce leží, je dáno znaménky složek reakce F_{RCx} a F_{RCy} .

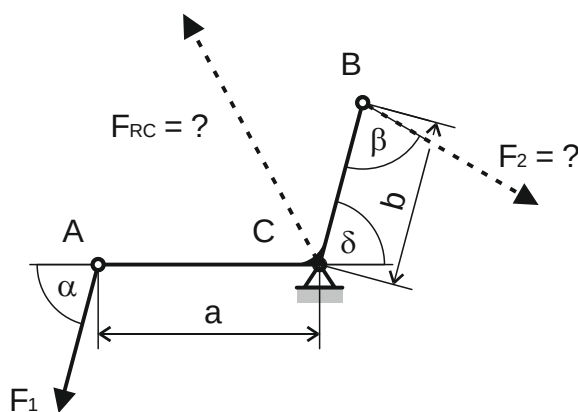
Řešení grafické:

Vnější zátěžné síly F_1 a F_2 jsou v rovnováze s reakcí F_{RC} a mají opět společný průsečík nositelek, bod D. Úlohu řešíme jako v předchozím případě pomocí silového rovnovážného trojúhelníku.



Obr. 35 Grafické řešení silových poměrů na dvouramenné páce.

Pro dvouramennou páku úhlovou (viz obr. 36) platí obdobné podmínky jako v předchozím případě.

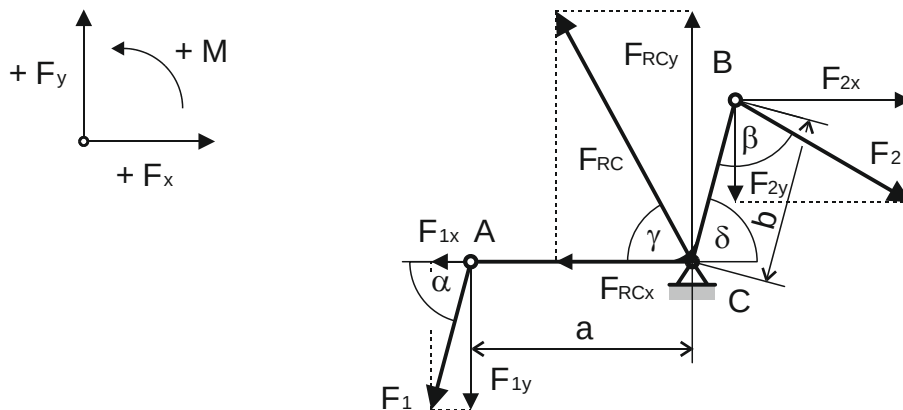


Zadané hodnoty: F_1 , a , b , α , β , δ .

Obr. 36 Silové poměry na dvouramenné páce úhlové.

Řešení početní:

Sílu F_1 a předpokládaný směr sil F_2 a F_{RC} rozložíme do směrů os x a y (viz obr. 37) a úlohu řešíme opět s využitím podmínek rovnováhy.



Obr. 37 Rozklad sil dvouramenné páky úhlové.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{1x} - F_{RCx} + F_{2x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{1y} + F_{RCy} - F_{2y} = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_B = -F_{1x} \cdot b \cdot \sin \delta + F_{1y} \cdot (a + b \cdot \cos \delta) - F_{RCx} \cdot b \cdot \sin \delta - F_{RCy} \cdot b \cdot \cos \delta = 0$$

$$F_{2y} = F_{2x} \cdot \tan(180^\circ - \beta - \delta) \quad (37)$$

Z toho plyne, že řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$-F_{1x} \cdot b \cdot \sin \delta + F_{1y} \cdot (a + b \cdot \cos \delta) - F_{RCx} \cdot b \cdot \sin \delta - F_{RCy} \cdot b \cdot \cos \delta = 0$$

$$-F_{1x} - F_{RCx} + F_{2x} = 0 \Rightarrow F_{RCx} = F_{2x} - F_{1x} \quad (38)$$

$$-F_{1y} + F_{RCy} - F_{2x} \cdot \tan(180^\circ - \beta - \delta) = 0 \Rightarrow F_{RCy} = F_{1y} + F_{2x} \cdot \tan(180^\circ - \beta - \delta) \quad (39)$$

$$-F_{1x} \cdot b \cdot \sin \delta + F_{1y} \cdot (a + b \cdot \cos \delta) - F_{2x} \cdot b \cdot \sin \delta + F_{1x} \cdot b \cdot \sin \delta -$$

$$-F_{1y} \cdot b \cdot \cos \delta - F_{2x} \cdot \tan(180^\circ - \beta - \delta) \cdot b \cdot \cos \delta = 0 \Rightarrow$$

$$F_{2x} = \frac{-F_{1x} \cdot b \cdot \sin \delta + F_{1y} \cdot (a + b \cdot \cos \delta) + F_{1x} \cdot b \cdot \sin \delta - F_{1y} \cdot b \cdot \cos \delta}{b \cdot \sin \delta + \tan(180^\circ - \beta - \delta) \cdot b \cdot \cos \delta}$$

Příčemž:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha \quad (40)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha \quad (41)$$

Pak tedy:

$$F_{2x} = \frac{-F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b \cdot \sin \delta + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a + b \cdot \cos \delta) + F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b \cdot \sin \delta - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot b \cdot \cos \delta}{b \cdot \sin \delta + \tan(180^\circ - \beta - \delta) \cdot b \cdot \cos \delta}$$

Poté z rovnice (37) vypočítáme F_{2y} , z rovnice (38) a (40) vypočítáme F_{RCx} a z rovnice (39) a (41) vypočítáme F_{RCy} .

Dále pak:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

$$F_{RC} = \sqrt{F_{RCx}^2 + F_{RCy}^2}$$

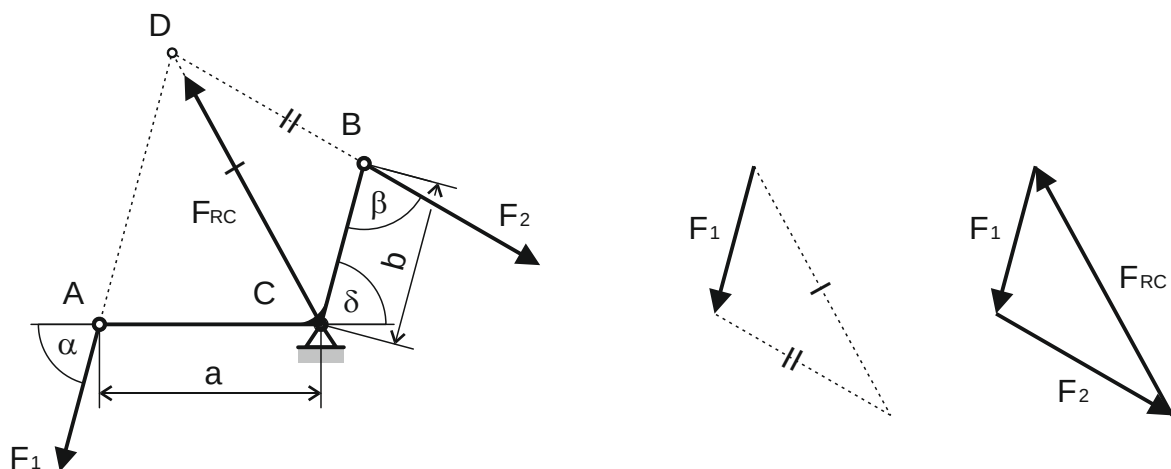
Úhel sklonu reakce γ od osy x je dán vztahem.

$$\tan \gamma = \frac{|F_{RCy}|}{|F_{RCx}|} \Rightarrow \gamma = \dots$$

V jakém kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v působišti síly F_{RC} pak reakce leží, je dáno znaménky složek reakce F_{RCx} a F_{RCy} .

Řešení grafické:

Úlohu opět řešíme pomocí silového rovnovážného trojúhelníku.



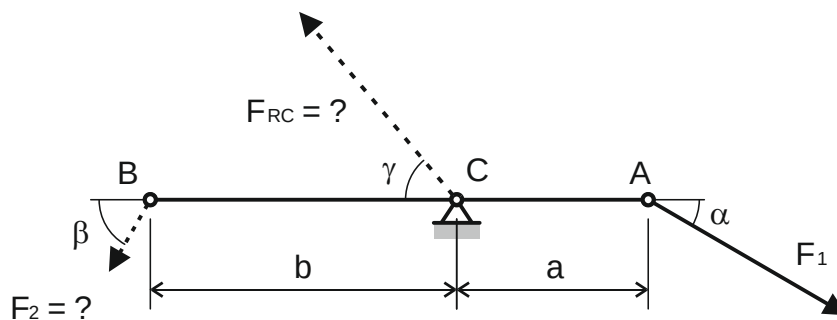
Obr. 38 Grafické řešení silových poměrů na dvouramenné páce úhlové.

Příklad:

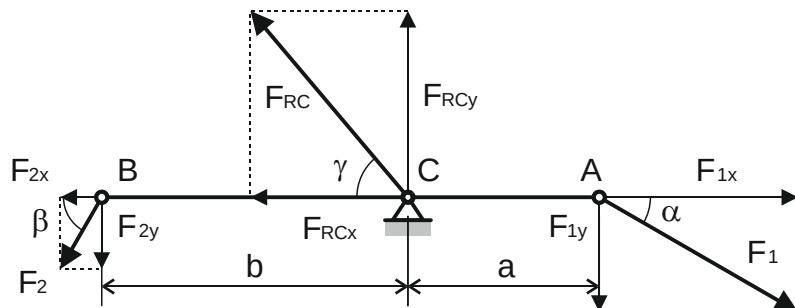
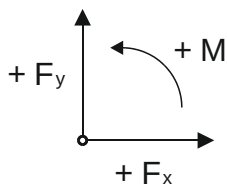
Řešte početně a graficky velikost síly F_2 a velikost reakce F_{RC} v čepu dvouramenné páky.

Zadané hodnoty:

$$F_1 = 300\text{N}, a = 250\text{mm}, b = 400\text{mm}, \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$$

**Řešení početní:**

Sílu F_1 a předpokládaný směr sil F_2 a F_{RC} rozložíme do směrů os x a y a úlohu řešíme s využitím podmínek rovnováhy.



Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{2x} - F_{RCx} + F_{1x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{2y} + F_{RCy} - F_{1y} = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_C = F_{2y} \cdot b - F_{1y} \cdot a = 0$$

$$\tan \beta = \frac{F_{2y}}{F_{2x}}$$

Velikosti sil F_{2y} , F_{2x} , F_{RCy} a F_{RCx}

$$F_{2y} \cdot b - F_{1y} \cdot a = 0 \Rightarrow F_{2y} = \frac{F_{1y} \cdot a}{b} = \frac{F_1 \cdot \sin \alpha \cdot a}{b} = \frac{300N \cdot \sin 30^\circ \cdot 250mm}{400mm} = 93,8N$$

$$\tan \beta = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} \Rightarrow F_{2x} = \frac{F_{2y}}{\tan \beta} = \frac{93,8N}{\tan 60^\circ} = 54,2N$$

$$-F_{2y} + F_{RCy} - F_{1y} = 0 \Rightarrow F_{RCy} = F_{2y} + F_{1y} = F_{2y} + F_1 \cdot \sin \alpha = 93,8N + 300N \cdot \sin 30^\circ = 243,8N$$

$$-F_{2x} - F_{RCx} + F_{1x} = 0 \Rightarrow F_{RCx} = F_{1x} - F_{2x} = F_1 \cdot \cos \alpha - F_{2x} = 300N \cdot \cos 30^\circ - 54,2N = 205,6N$$

Velikost síly F_2

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{54,2N^2 + 93,8N^2} = 107,8N$$

Velikost síly F_{RC}

$$F_{RC} = \sqrt{F_{RCx}^2 + F_{RCy}^2} = \sqrt{205,6N^2 + 243,8N^2} = 318,9N$$

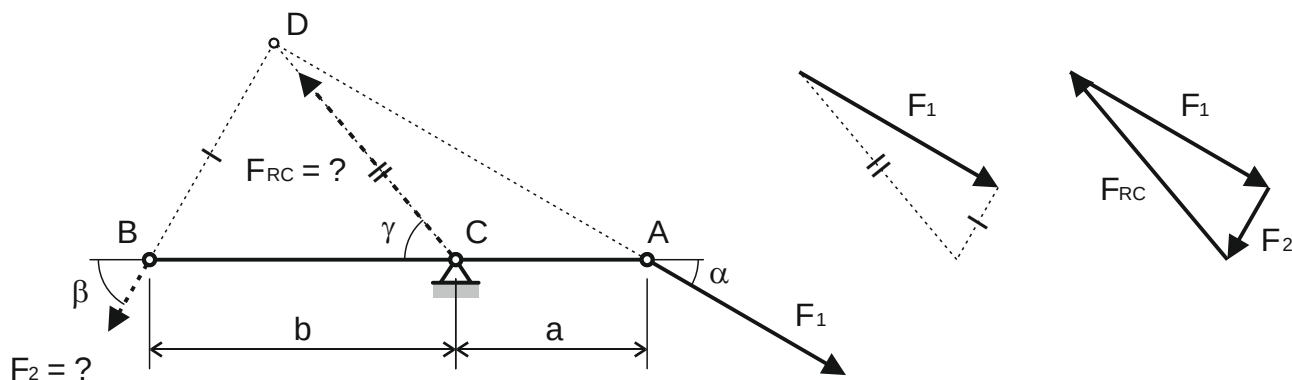
Úhel sklonu reakce γ od osy x je dán vztahem.

$$\tan \gamma = \frac{|F_{RCy}|}{|F_{RCx}|} = \frac{243,8N}{205,6N} = 1,186 \Rightarrow \gamma = 49^\circ 51'$$

Znaménka složek reakce F_{RCx} a F_{RCy} jsou dle předpokladu, který se potvrdil výpočtem (-) a (+), tak lze předpokládat, že reakce F_{RC} leží ve druhém kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v jejím působišti.

Řešení grafické:

Úlohu opět řešíme pomocí silového rovnovážného trojúhelníku.



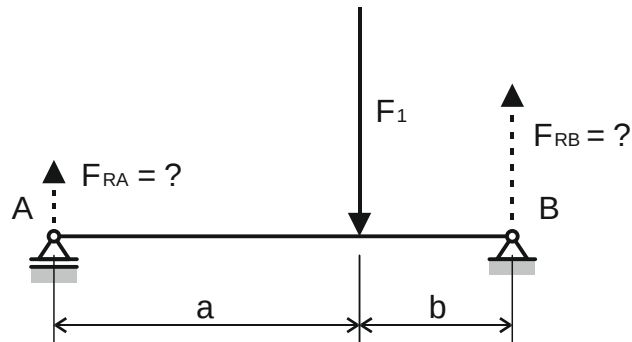
Měřítka délek $m_L = 10mm.mm^{-1}$

Měřítka sil $m_F = 10N.mm^{-1}$

5.5 Rovnováha sil na nosníku

Řešení úloh je podobné jako u rovnováhy sil na páce. Opět využíváme početní i grafickou metodu.

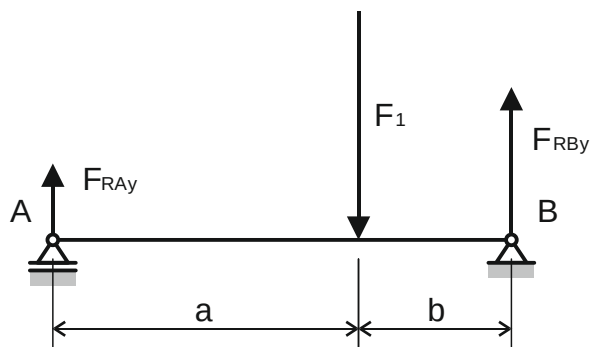
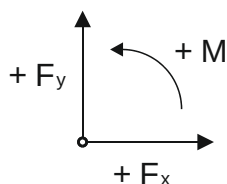
5.5.1 Zátěžné síly jsou kolmé k podporám



Obr. 39 Nosník zatížený silou kolmou k podporám.

Řešení početní:

Směry sil F_1 , F_{RAy} a F_{RBy} jsou svislé a není tedy nutný rozklad do směrů os x a y . Úlohu řešíme s využitím podmínek rovnováhy.



Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

V tomto směru se nevyskytují žádné síly, tzn., že podmínka je automaticky splněna.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_1 + F_{RBy} = 0 \quad (42)$$

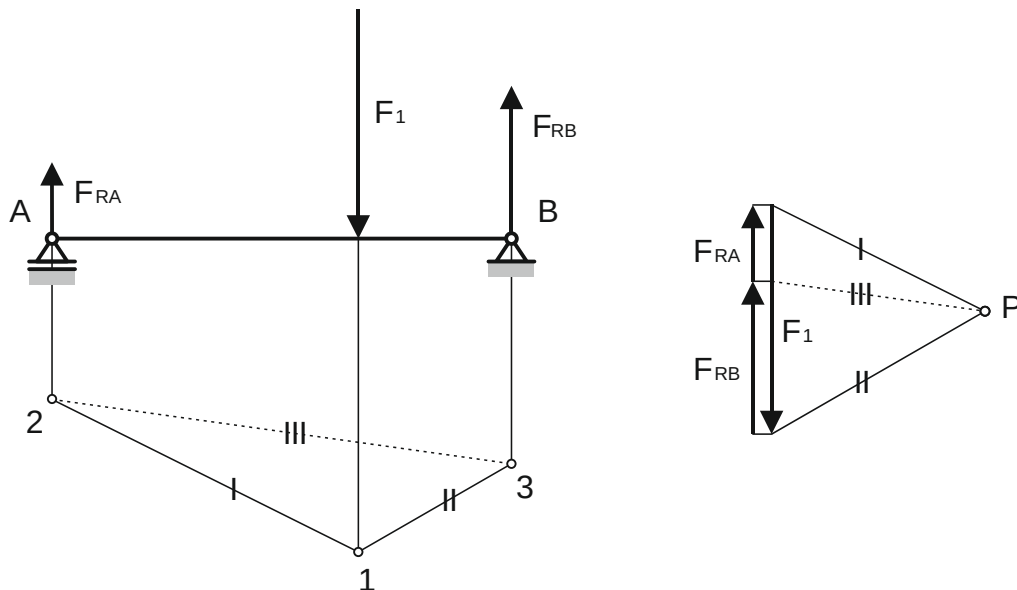
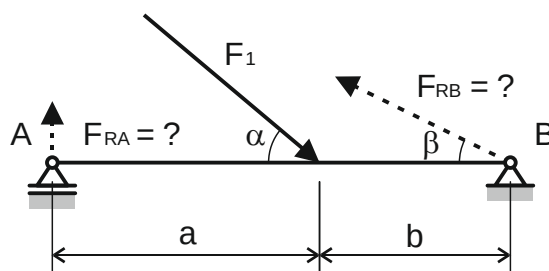
$$\Sigma M = 0$$

$$M_A = -F_1 \cdot a + F_{RBy} \cdot (a + b) = 0 \quad (43)$$

Z rovnice (43) vypočítáme F_{RBy} a z rovnice (42) vypočítáme F_{RAy} .

Řešení grafické:

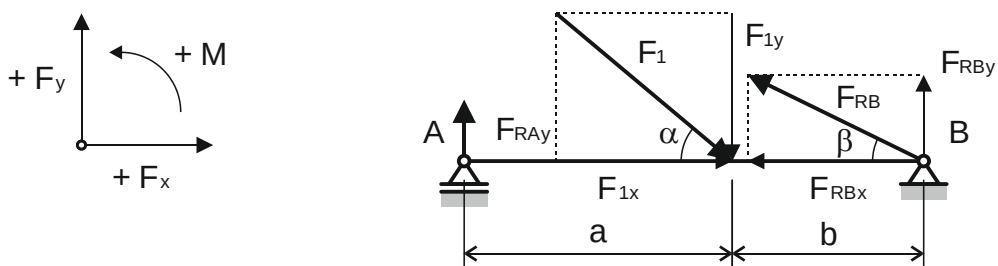
K řešení úlohy využijeme pólový a vláknový obrazec. Nejprve vyneseme sílu F_1 a zvolíme pól P . Počátek i konec síly F_1 spojíme s pólem a získáme tak směry vláken I a II. Tyto společně vyneseme na nositelku síly F_1 do společného bodu 1 a získáme tak body 2 a 3. Tyto pak spojíme vláknem III a jeho rovnoběžkou v pólovém obrazci určíme velikost sil F_{RA} a F_{RB} .

**5.5.2 Zátěžné síly mají obecný směr**

Obr. 40 Nosník zatížený silou jež má obecný směr.

Řešení početní:

Sílu F_1 a F_{RB} rozložíme do směrů os x a y a úlohu řešíme s využitím podmínek rovnováhy.



Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{1x} - F_{RBx} = 0$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha - F_{RBx} = 0 \quad (44)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_{1y} + F_{RBy} = 0$$

$$F_{RAy} - F_1 \cdot \sin \alpha + F_{RBy} = 0 \quad (45)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_B = -F_{RAy} \cdot (a + b) + F_{1y} \cdot b = -F_{RAy} \cdot (a + b) + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot b = 0 \quad (46)$$

Z rovnice (46) vypočítáme F_{RAy} , z rovnice (45) vypočítáme F_{RBy} a z rovnice (44) vypočítáme F_{RBx} .

Dále pak:

$$F_{RB} = \sqrt{F_{RBx}^2 + F_{RBy}^2}$$

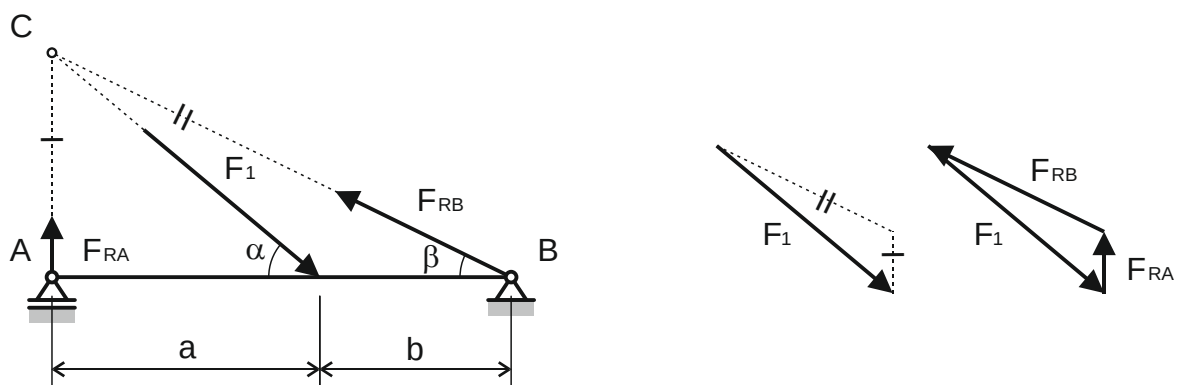
Úhel sklonu reakce β od osy x je dán vztahem.

$$\tan \beta = \frac{|F_{RBy}|}{|F_{RBx}|} \Rightarrow \beta = \dots$$

V jakém kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v působišti síly F_{RB} pak reakce leží, je dáno znaménky složek reakce F_{RBx} a F_{RBy} .

Řešení grafické:

Úlohu řešíme pomocí silového rovnovážného trojúhelníku.

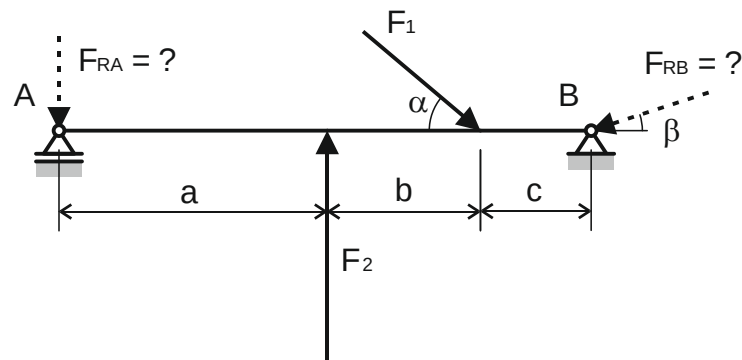


Příklad:

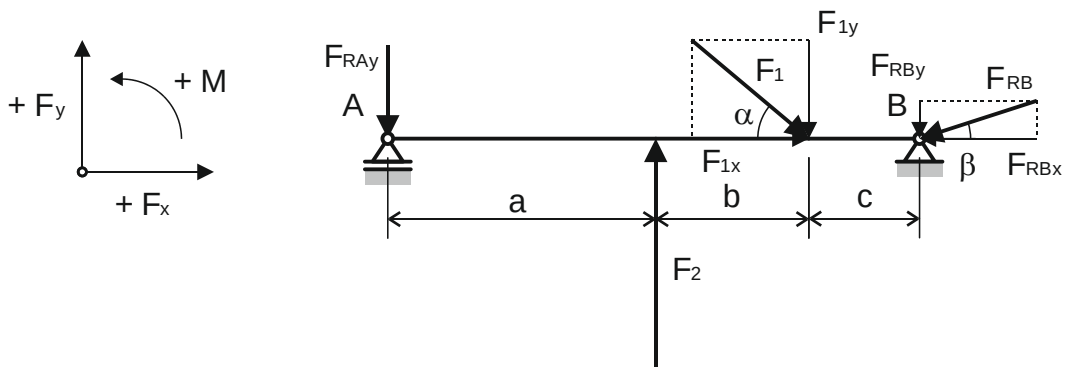
Určete početně a graficky, směr, smysl a velikost reakcí v podporách zadaného nosníku.

Zadané hodnoty:

$$F_1 = 200\text{N}, F_2 = 300\text{N}, a = 350\text{mm}, b = 200\text{mm}, c = 150\text{mm}, \alpha = 40^\circ$$

**Řešení početní:**

Sílu F_1 a F_{RB} rozložíme do směrů os x a y a úlohu řešíme s využitím podmínek rovnováhy.



Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{1x} - F_{RBx} = 0$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha - F_{RBx} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{RAy} + F_2 - F_{1y} - F_{RBy} = 0$$

$$-F_{RAy} + F_2 - F_1 \cdot \sin \alpha - F_{RBy} = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_B = F_{RAy} \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (b + c) + F_{1y} \cdot c = F_{RAy} \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (b + c) + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot c = 0$$

Velikosti sil F_{RAy} , F_{RBx} a F_{RBy}

$$F_{RAy} \cdot (a + b + c) - F_2 \cdot (b + c) + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot c = 0 \Rightarrow F_{RAy} = \frac{F_2 \cdot (b + c) - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot c}{a + b + c} =$$

$$= \frac{300N \cdot (200mm + 150mm) - 200N \cdot \sin 40^\circ \cdot 150mm}{350mm + 200mm + 150mm} = 122,5N$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha - F_{RBx} = 0 \Rightarrow F_{RBx} = F_1 \cdot \cos \alpha = 200N \cdot \cos 40^\circ = 153,2N$$

$$-F_{RAy} + F_2 - F_1 \cdot \sin \alpha - F_{RBy} = 0 \Rightarrow F_{RBy} = -F_{RAy} + F_2 - F_1 \cdot \sin \alpha =$$

$$= -122,5N + 300N - 200N \cdot \sin 40^\circ = 48,9N$$

Velikost síly F_{RB}

$$F_{RB} = \sqrt{F_{RBx}^2 + F_{RBy}^2} = \sqrt{153,2N^2 + 48,9N^2} = 160,8N$$

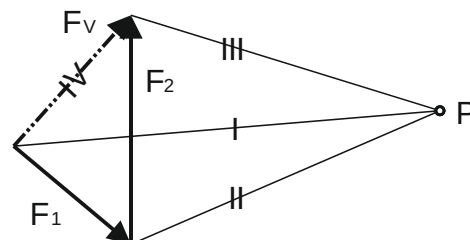
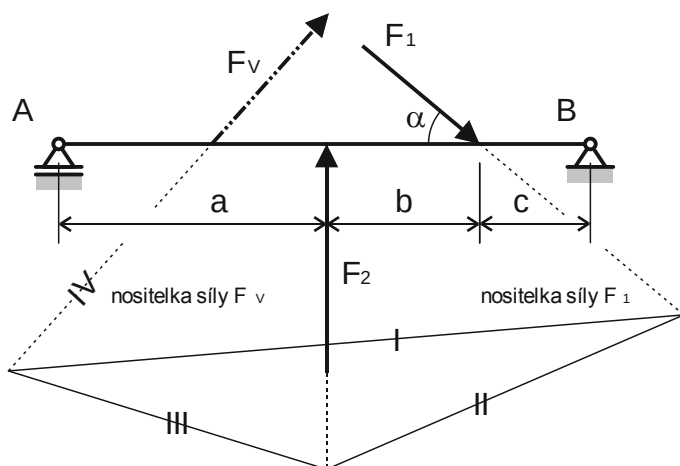
Úhel sklonu reakce β od osy x je dán vztahem.

$$\tan \beta = \frac{|F_{RBy}|}{|F_{RBx}|} = \frac{48,9N}{153,2N} = 0,319 \Rightarrow \gamma = 17^\circ 41'$$

Znaménka složek reakce F_{RBx} a F_{RBy} jsou dle předpokladu, který se potvrdil výpočtem (-) a (-), tak lze předpokládat, že reakce F_{RC} leží v třetím kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v jejím působišti.

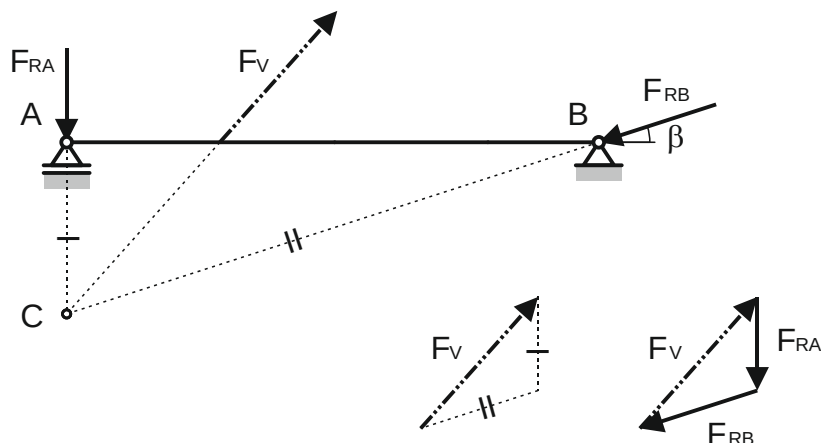
Řešení grafické:

Nejprve určíme pomocí pólového a vláknového obrazce výslednici sil F_1 a F_2 . Poté tuto výslednici uvedeme do rovnováhy se silami F_{RA} a F_{RB} čímž zjistíme jejich směr, smysl a velikost.



Měřítka délek $m_L = 10mm.mm^{-1}$

Měřítka sil $m_F = 10N.mm^{-1}$



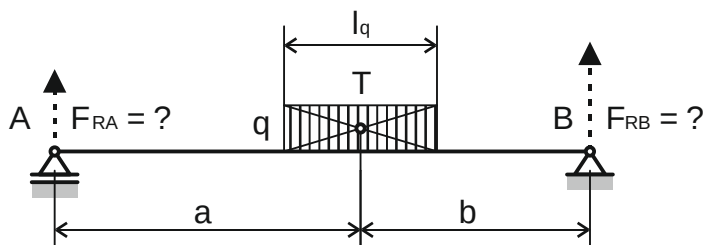
5.5.3 Nosník se spojitým zatížením

Spojité zatížení q je zatížení rovnoměrně rozvrstvené po určité délce (viz obr. 41). Udává se v hmotnosti připadající na 1 metr délky a má rozměr $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$. Celková síla tohoto zatížení bude:

$$F_q = q \cdot l_q \cdot g \quad (47)$$

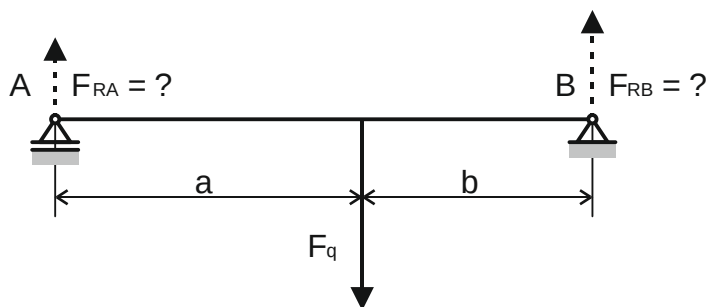
kde:

g je tíhové zrychlení ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)



Obr. 41 Nosník zatížený spojitým zatížením.

Sílu F_q nahradíme účinek spojitého zatížení q (viz obr. 42) a vyšetřování rovnováhy sil na nosníku již řešíme známým způsobem.



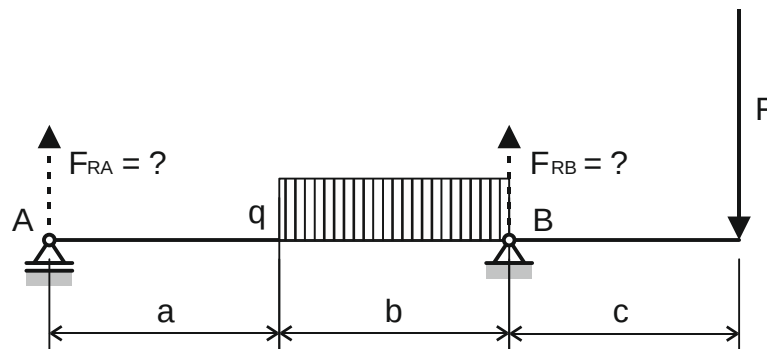
Obr. 42 Nahrazení účinku spojitého zatížení silou F_q .

Příklad:

Určete početně a graficky, směr, smysl a velikost reakcí v podporách zadaného nosníku.

Zadané hodnoty:

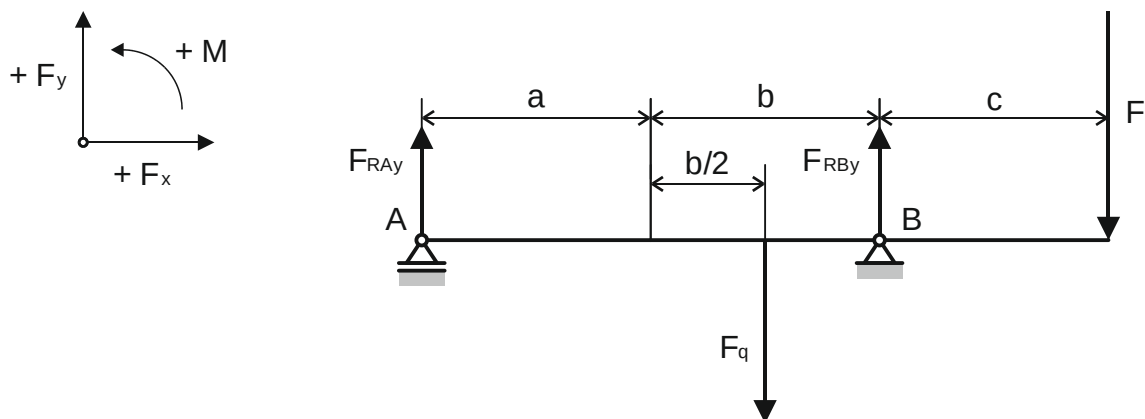
$$F = 300\text{N}, q = 80\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}, a = b = c = 300\text{mm}$$

**Řešení početní:**

Sílu F_q nahradíme účinek spojitého zatížení q .

Velikost síly F_q

$$F_q = q \cdot b \cdot g = 80\text{kg}\cdot\text{m}^{-1} \cdot 0,3\text{m} \cdot 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 240\text{N}$$



Směry sil F_1 a F_q jsou svislé a není tedy nutný rozklad do směrů os x a y . Úlohu řešíme s využitím podmínek rovnováhy.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

V tomto směru se nevyskytují žádné síly, tzn., že podmínka je automaticky splněna.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_q + F_{RBy} - F = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_A = -F_q \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + F_{RBy} \cdot (a + b) - F \cdot (a + b + c) = 0$$

Velikosti sil F_{RAy} a F_{RBy}

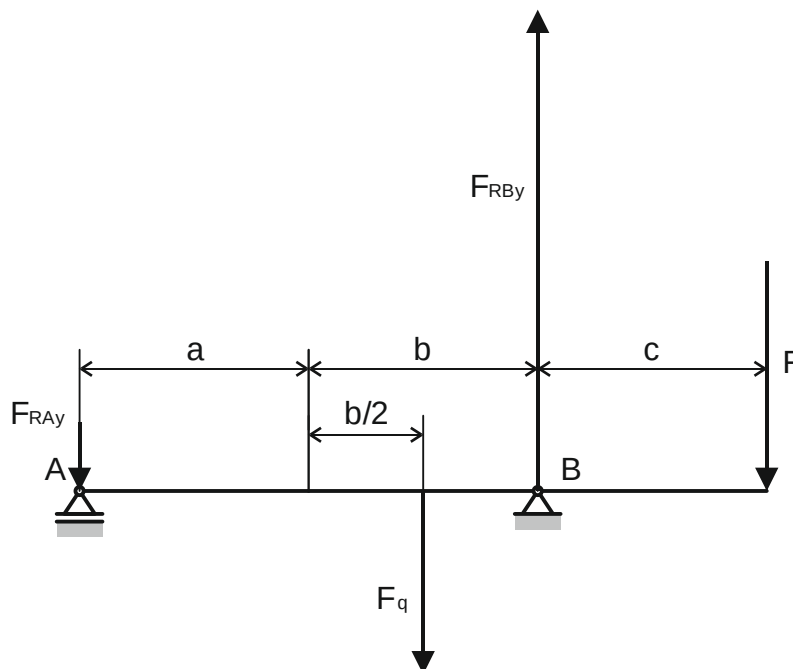
$$-F_q \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + F_{RBy} \cdot (a + b) - F \cdot (a + b + c) = 0 \Rightarrow F_{RBy} = \frac{F_q \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + F \cdot (a + b + c)}{(a + b)} =$$

$$= \frac{240N \cdot \left(300mm + \frac{300mm}{2}\right) + 300N \cdot (300mm + 300mm + 300mm)}{(300mm + 300mm)} = 630N$$

$$F_{RAy} - F_q + F_{RBy} - F = 0 \Rightarrow F_{RAy} = F_q - F_{RBy} + F = 240N - 630N + 300N = -90N$$

Jelikož znaménko u výsledku síly F_{RAy} je záporné, znamená to, že předpoklad smyslu působení síly F_{RAy} byl nesprávný a reakce v bodě A působí tedy v opačném smyslu.

Grafické znázornění výsledků početního řešení:

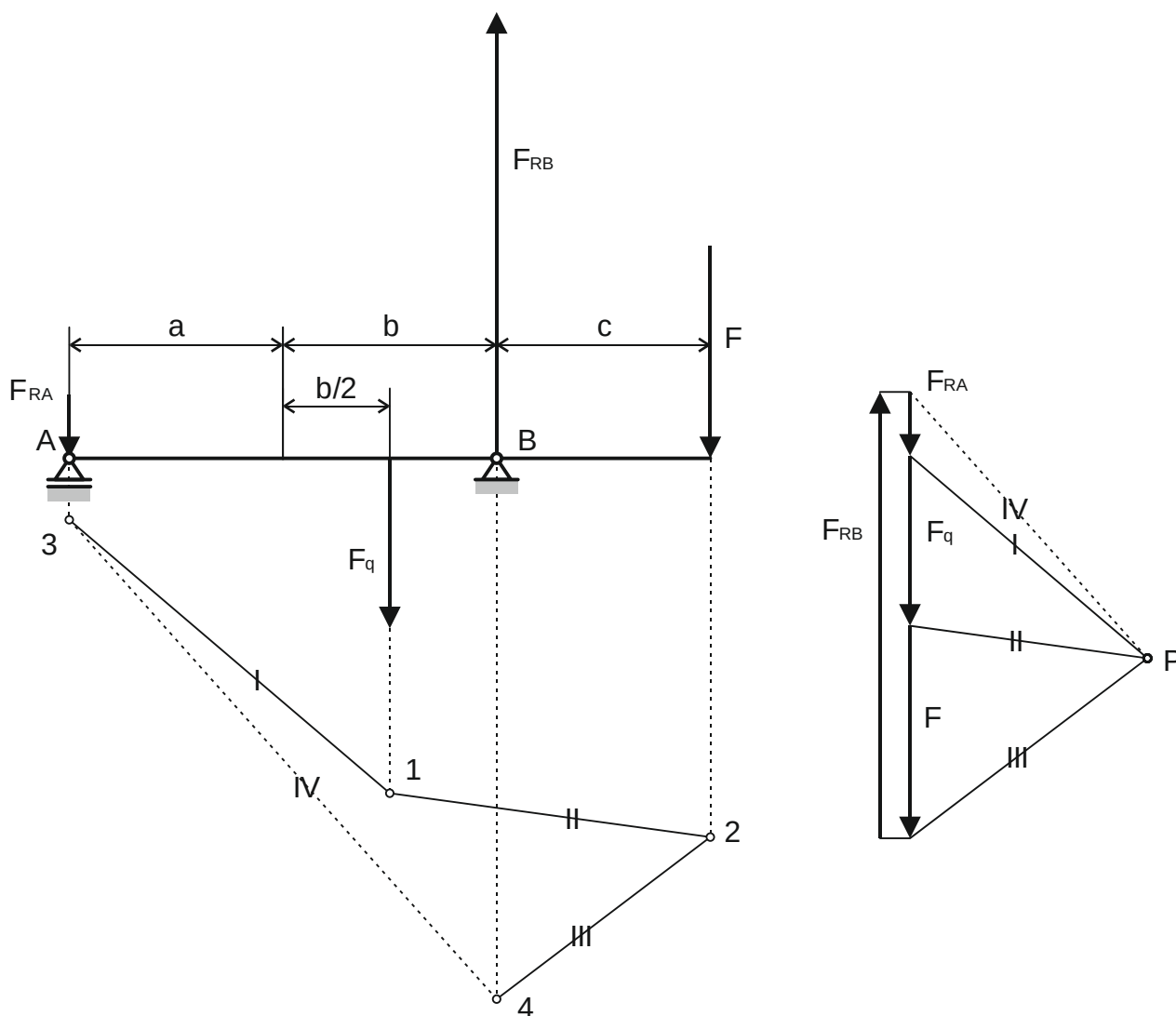


Měřítka délek $m_L = 10mm.mm^{-1}$

Měřítka sil $m_F = 10N.mm^{-1}$

Řešení grafické:

Úlohu řešíme již známou metodou, pomocí pólového a vláknového obrazce. Nejprve vyneseme sílu F_q a F a zvolíme pól P . Počátek i konec síly F_q a F spojíme s pólem a získáme tak směry vláken I, II a III. Vlákna I a II společně vyneseme na nositelku síly F_q do společného bodu 1. V průsečíku vláken II a nositelky síly F získáme bod 2, kde vyneseme vlákno III. Dále určíme bod 3 v průsečíku vláken I a nositelky síly F_{RA} a bod 4 v průsečíku vláken III a nositelky síly F_{RB} . Tyto pak spojíme vláknem IV a jeho rovnoběžkou v pólovém obrazci určíme velikost sil F_{RA} a F_{RB} .

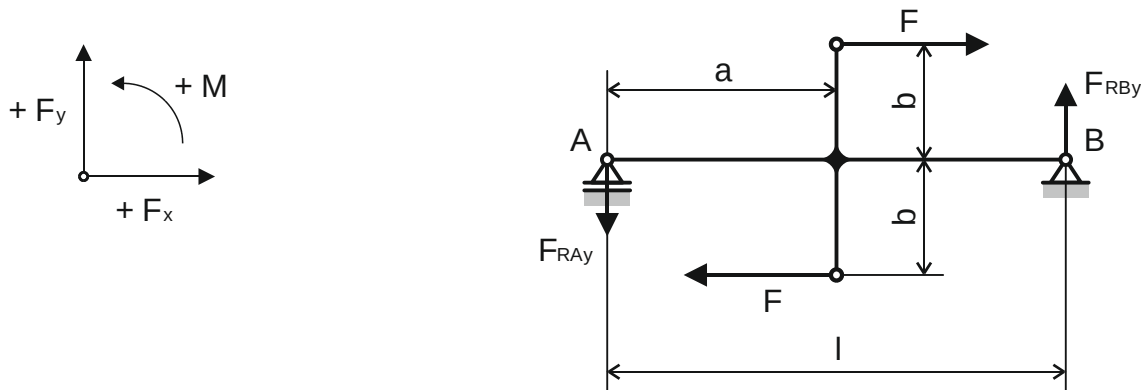


Měřítko délek $m_L = 10\text{mm.mm}^{-1}$

Měřítko sil $m_F = 10\text{N.mm}^{-1}$

5.5.4 Nosník zatížený silovou dvojicí

Řešení početní:



Obr. 43 Silové poměry na nosníku zatíženém silovou dvojicí.

Nosník je zatížen silovou dvojicí, která tvoří moment o velikosti:

$$M = F \cdot 2 \cdot b = 2 \cdot F \cdot b$$

Tento moment je v rovnováze s momentem reakcí. Dle podmínek rovnováhy pak platí:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F - F = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RBy} - F_{RAy} = 0 \Rightarrow F_{RAy} = F_{RBy}$$

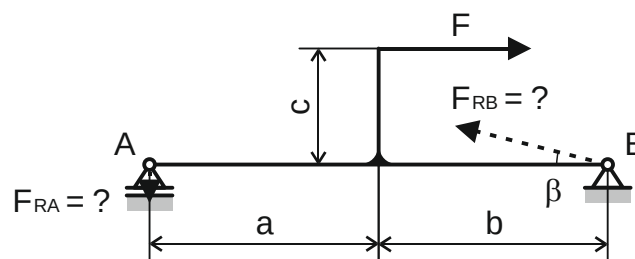
$$\Sigma M = 0$$

$$M_A = F_{RBy} \cdot l - M = F_{RBy} \cdot l - 2 \cdot F \cdot b = 0 \Rightarrow F_{RBy} = 2 \cdot F \cdot \frac{b}{l}$$

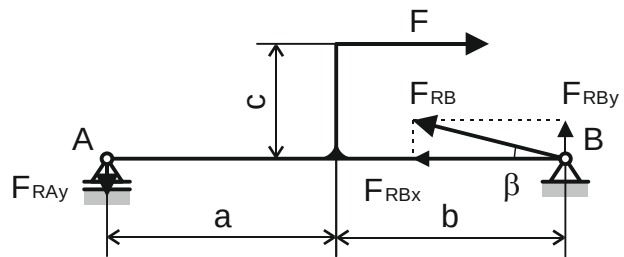
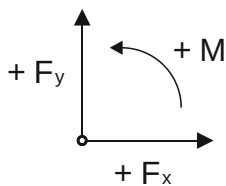
Pozn.: Z podmínek rovnováhy vyplývá, že při řešení této úlohy vůbec nezáleží na vzdálenosti a .

5.5.5 Nosník zatížený momentem síly

Úlohu můžeme řešit již známými metodami jak početně, tak i graficky.



Obr. 44 Silové poměry na nosníku zatíženém momentem síly.

Řešení početní:

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F - F_{RBx} = 0 \quad (48)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{RAy} + F_{RBy} = 0 \quad (49)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_B = F_{RAy} \cdot (a + b) - F \cdot c = 0 \quad (50)$$

Z rovnice (50) vypočítáme F_{RAy} , z rovnice (49) vypočítáme F_{RBy} a z rovnice (48) vypočítáme F_{RBx} .

Dále pak:

$$F_{RB} = \sqrt{F_{RBx}^2 + F_{RBy}^2}$$

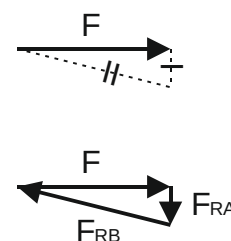
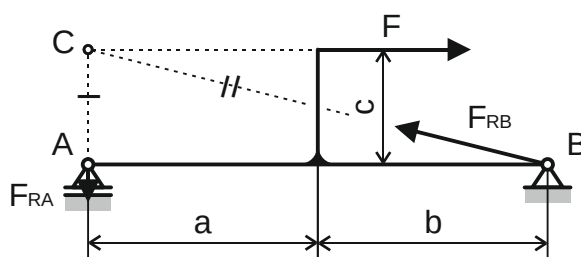
Úhel sklonu reakce β od osy x je dán vztahem.

$$\tan \beta = \frac{|F_{RBy}|}{|F_{RBx}|} \Rightarrow \beta = \dots$$

V jakém kvadrantu pomyslného souřadného systému umístěného v působišti síly F_{RB} pak reakce leží, je dáno znaménky složek reakce F_{RBx} a F_{RBy} .

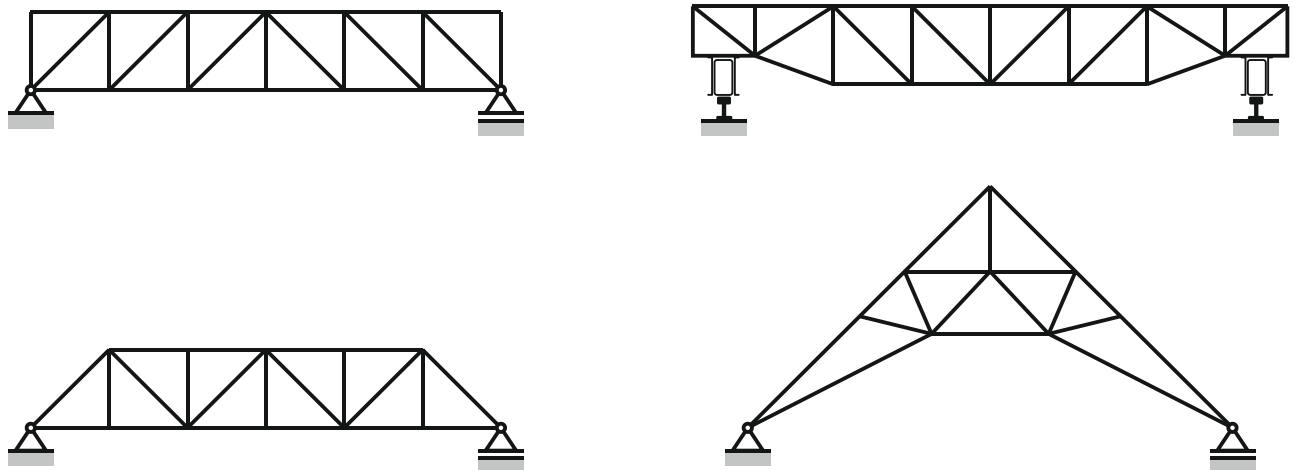
Řešení grafické:

Úlohu řešíme pomocí silového rovnovážného trojúhelníku.



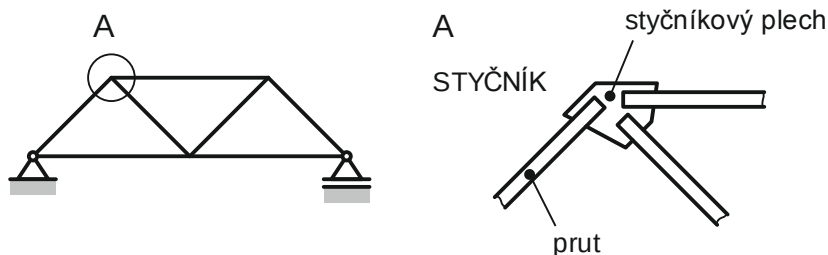
6. PRUTOVÉ SOUSTAVY

Prutové soustavy jsou konstrukce složené z prutů, které jsou vzájemně spojené ve styčnicích. S prutovými soustavami (viz obr. 45) se setkáváme u jeřábů, mostů, střešních konstrukcí, rámu, nosných konstrukcí atd.



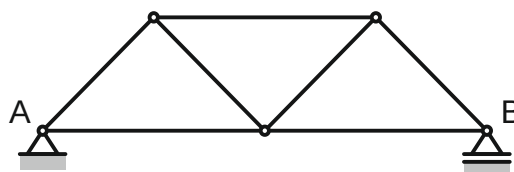
Obr. 45 Příklady prutových soustav.

Pevné spojení jednotlivých prutů je zabezpečeno styčnickými plechy (viz obr. 46), k nimž jsou jednotlivé pruty přivařeny nebo přinýtovány.



Obr. 46 Detail spojení prutů konstrukce pomocí styčnických plechů.

Tyto typy spojení při řešení silových účinků na prutové konstrukci zjednodušujeme a nahrazujeme je spojením kloubovým (viz obr. 47).



Obr. 47 Zjednodušení styčníků kloubovým spojením.

Pruty jsou vytvořeny z válcovaných profilů, případně z trubek kruhového či obdélníkového průřezu. Cílem při řešení prutové soustavy je zjistit nejen reakce v uložení (ukotvení) konstrukce, ale i velikost sil působících v jednotlivých prutech, které tvoří základ pro jejich následné dimenzování. Pruty mohou být namáhány buďto na tah, nebo na tlak (vzpěr) (viz obr. 48).



Obr. 48 Rovnováha prutů prutové soustavy. Prut č. 1 je namáhán tahem, prut č. 2 je namáhán tlakem.

Při řešení prutové soustavy je nutné, aby byly splněny následující podmínky:

1. Prutová soustava musí být dokonale tuhá, tj. pruty tvoří staticky určité obrazce, jimiž jsou trojúhelníky.
2. Na prutech a ve styčnicích platí podmínky rovnováhy sil a momentů.

Řešení prutových soustav můžeme provádět početně i graficky. Početní metoda je přesnější naproti tomu grafická metoda je rychlejší a přehlednější.

6.1 Podmínka statické určitosti prutové soustavy

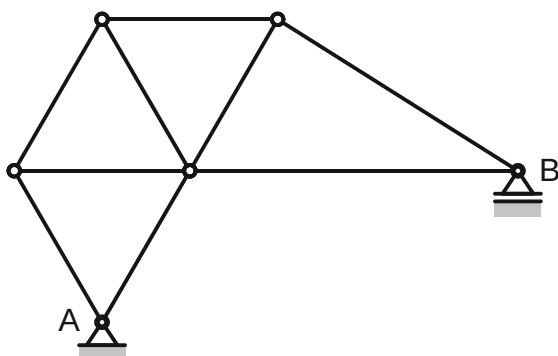
Podmínka statické určitosti prutové soustavy je dána vztahem:

$$p + m = 2 \cdot s \quad (51)$$

kde:

- p je počet prutů soustavy
 m je počet složek vnějších reakcí
 s je počet styčniců soustavy

Příklad:



$$p + m = 2 \cdot s$$

$$9 + 3 = 2 \cdot 6$$

$$12 = 12$$

Prutová konstrukce je **staticky určitá** a protože u staticky určitých konstrukcí nedochází ke změně polohy, je i tvarově určitá.

Obr. 49 Příklad staticky určité prutové konstrukce.

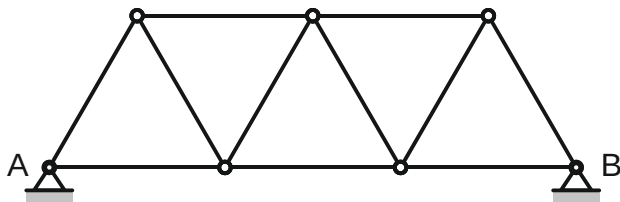
Při posuzování statické určitosti soustavy však mohou nastat výjimečné případy, kdy soustava vyhovuje podmínce statické určitosti, ale ve skutečnosti je celá pohyblivá. Máme-li pochybnosti, je nutné vyšetřit soustavu podrobněji kinematicky, nebo u ní provést statické řešení. Vyjdou-li neznámé osově síly jednoznačně v konečné velikosti je to důkaz, že nejde o výjimekový případ.

Pokud nastane případ že:

$$p + m > 2 \cdot s \quad (52)$$

jedná se o konstrukci staticky neurčitou. Konstrukce staticky neurčitá je tvarově přeurčená, protože k zachování tvaru konstrukce, některé vazby přebývají. Statickou neurčitost přitom dělíme na vnější (určenou typem použitých vazeb) a vnitřní (určenou skladbou konstrukce prutové soustavy).

Příklad:



$$p + m > 2 \cdot s$$

$$11 + 4 > 2 \cdot 7$$

$$15 > 14$$

Prutová konstrukce je **staticky neurčitá** a tvarově přeurčená, protože k zachování tvaru konstrukce některé vazby přebývají.

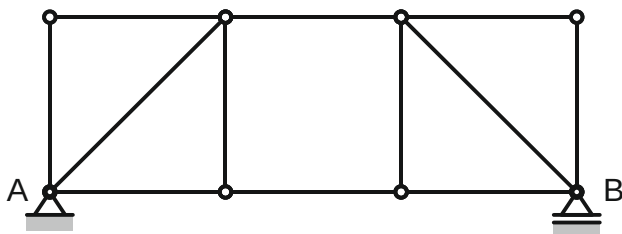
Obr. 50 Příklad staticky neurčité prutové konstrukce.

V případě, kdy:

$$p + m < 2 \cdot s \quad (53)$$

jedná se o konstrukci staticky přeurčenou. Prutová konstrukce je v tomto případě staticky přeurčená a tvarově neurčitá, protože je pohyblivá.

Příklad:



$$p + m < 2 \cdot s$$

$$12 + 3 < 2 \cdot 8$$

$$15 < 16$$

Prutová konstrukce je **staticky přeurčená** a tvarově neurčitá, protože ve středním poli chybí prut a je tím pádem pohyblivá.

Obr. 51 Příklad staticky přeurčené prutové konstrukce.

6.2 Početní metody řešení prutové soustavy

6.2.1 Metoda styčnicková

Metoda styčnicková vychází z požadavku rovnováhy sil působících v jednotlivých styčnících, což je prakticky stejné jako rovnováha soustavy sil se společným působištěm. Pro každý styčník tedy platí:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{a} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (54)$$

Při řešení prutové soustavy početní metodou styčnickovou postupujeme následujícím způsobem:

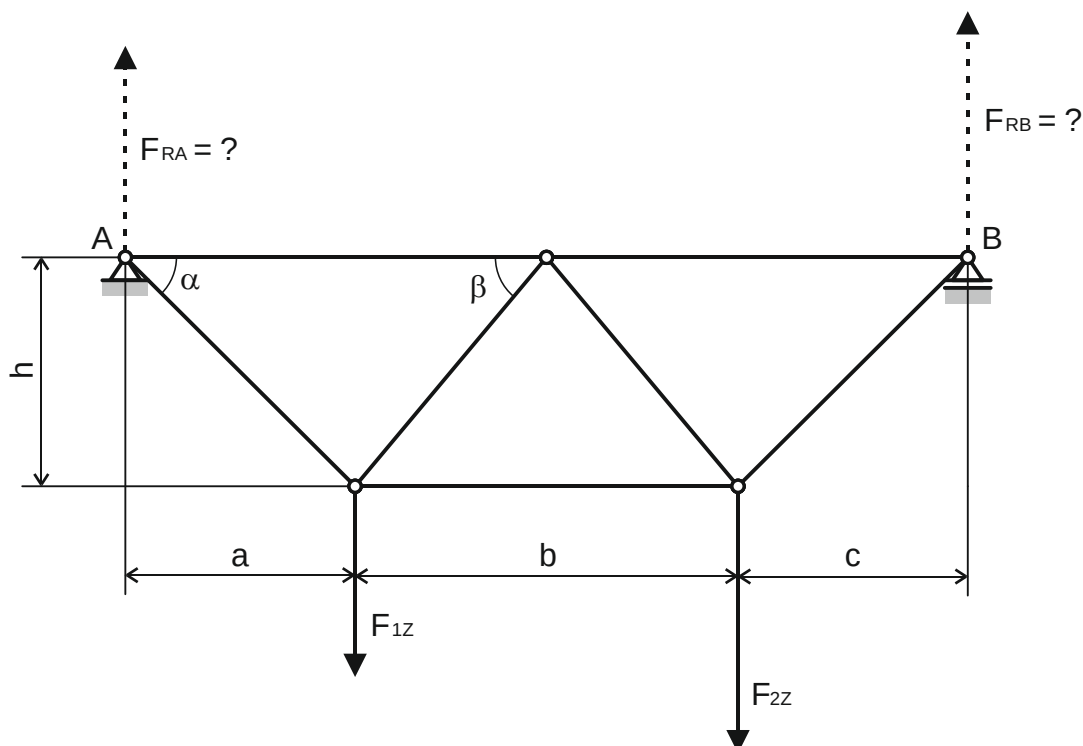
1. Zvolíme kladný smysl působení sil a momentů na prutové soustavě.
2. Očíslujeme všechny pruty a označíme všechny styčníky římskými číslicemi.
3. V osách prutů doplníme smysl sil působících na styčníky a to tak, jako by byl prut namáhán na tah (šipky sil v prutech budou směřovat od styčníků).
4. Z podmínek rovnováhy sil a momentů určíme směr a smysl reakcí uložení prutové soustavy.
5. Pro každý styčník stanovíme podmínky rovnováhy sil ve směru x a y a postupně dopočítáme velikosti sil v osách jednotlivých prutů. Výsledný smysl sil působících na styčníky bude dán znaménky dílčích výsledků. Kladná znaménka potvrzují předpoklad smyslu, záporná předpokládaný smysl mění na opačný.

Příklad:

Určete početní metodou styčnickovou smysl a velikost osových sil v jednotlivých prutech.

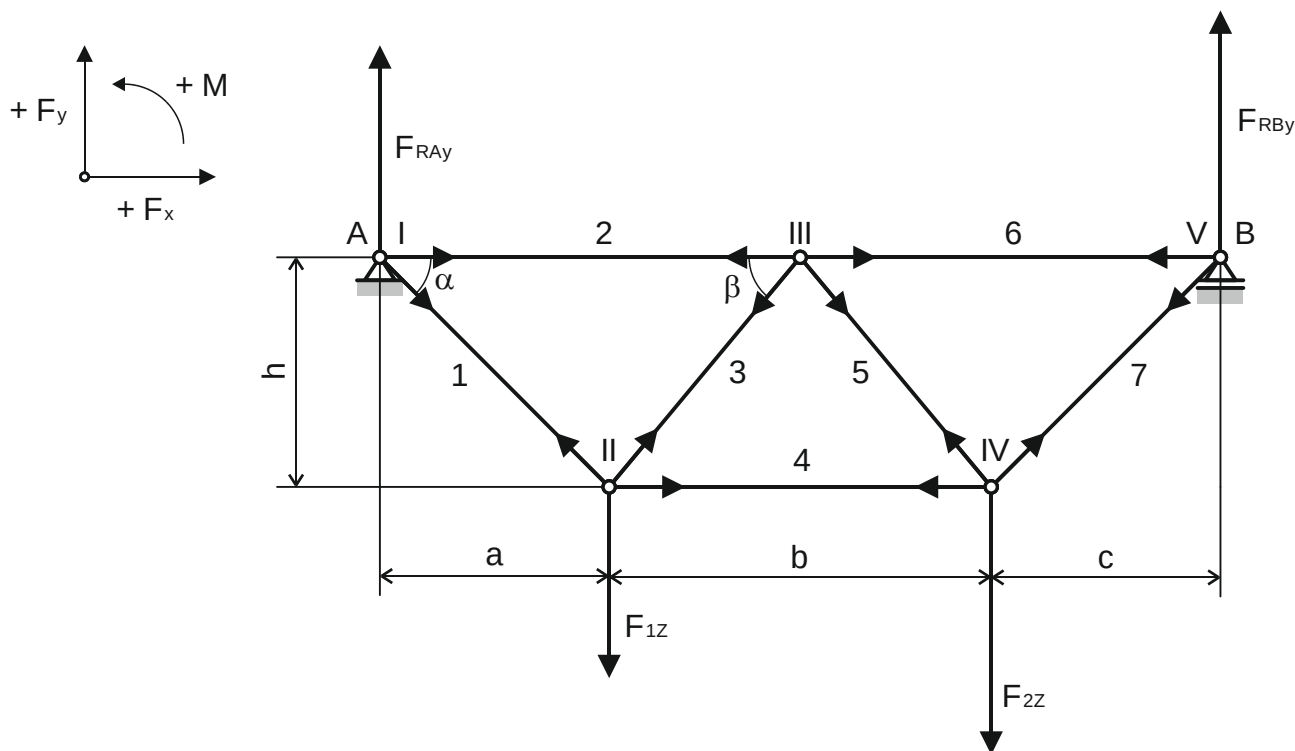
Zadané hodnoty:

$$F_{1z} = 2500\text{N}, F_{2z} = 3500\text{N}, a = c = h = 3000\text{mm}, b = 5000\text{mm}$$



Řešení:

Nejprve zvolíme kladný smysl působení sil a momentů na prutové soustavě, očísloveme všechny pruty a označíme všechny styčníky římskými číslicemi. Poté doplníme šipkami v osách jednotlivých prutů smysl sil působících na styčníky a to tak, jako by byl každý prut namáhán na tah (viz obr. 52). Nakonec početně řešíme smysl a velikost reakcí a sil v jednotlivých styčnicích.



Obr. 52 Označení prvků prutové soustavy při použití výpočtové metody styčnickové.

Velikost reakcí F_{RAY} a F_{RBy}

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

V tomto směru se nevyskytují žádné síly, tzn., že podmínka je automaticky splněna.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAY} - F_{1Z} - F_{2Z} + F_{RBy} = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_A = -F_{1Z} \cdot a - F_{2Z} \cdot (a + b) + F_{RBy} \cdot (a + b + c) = 0$$

$$-F_{1Z} \cdot a - F_{2Z} \cdot (a + b) + F_{RBy} \cdot (a + b + c) = 0 \Rightarrow F_{RBy} = \frac{F_{1Z} \cdot a + F_{2Z} \cdot (a + b)}{(a + b + c)} =$$

$$= \frac{2500N \cdot 3000mm + 3500N \cdot (3000mm + 5000mm)}{(3000mm + 5000mm + 3000mm)} = 3227,3N$$

$$F_{RAy} - F_{1Z} - F_{2Z} + F_{RBy} = 0 \Rightarrow F_{RAy} = F_{1Z} + F_{2Z} - F_{RBy} = 2500N + 3500N - 3227,3N = 2772,7N$$

Velikosti sil působících na jednotlivé styčníky:

Rovnováha sil působících na styčník č. I.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{1x} + F_{2x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_{1y} = 0$$

Velikost sil F_1 a F_2

$$F_{1y} = F_{RAy} = 2772,7N$$

$$F_{1x} = \frac{F_{1y}}{\tan \alpha} = \frac{F_{1y}}{\frac{h}{a}} = \frac{F_{1y} \cdot a}{h} = \frac{2772,7N \cdot 3000mm}{3000mm} = 2772,7N$$

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{2772,7N^2 + 2772,7N^2} = 3921,2N$$

$$F_2 = F_{2x} = -F_{1x} = -2772,7N$$

Ze znaménka výsledku síly F_2 je zřejmé, že její smysl je opačný oproti původnímu předpokladu.

Rovnováha sil působících na styčník č. II.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{1x} + F_{3x} + F_{4x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

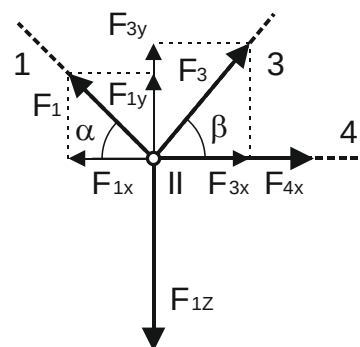
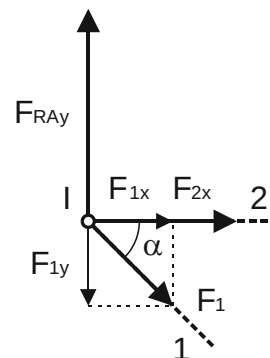
$$F_{1y} + F_{3y} - F_{1Z} = 0$$

Velikost sil F_3 a F_4

$$F_{3y} = F_{1Z} - F_{1y} = 2500N - 2772,7N = -272,7N$$

$$F_{3x} = \frac{F_{3y}}{\tan \beta} = \frac{F_{3y}}{\frac{h}{\frac{b}{2}}} = \frac{F_{3y} \cdot b}{2 \cdot h} = \frac{-272,7N \cdot 5000mm}{2 \cdot 3000mm} = -227,3N$$

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = \sqrt{(-227,3N)^2 + (-272,7N)^2} = 355N$$



$$F_4 = F_{4x} = F_{1x} - F_{3x} = 2772,7N - (-227,3N) = 3000N$$

Ze znamének výsledků sil F_{3x} a F_{3y} je zřejmé, že smysl síly F_3 je opačný oproti původnímu předpokladu.

Rovnováha sil působících na styčnick č. III.

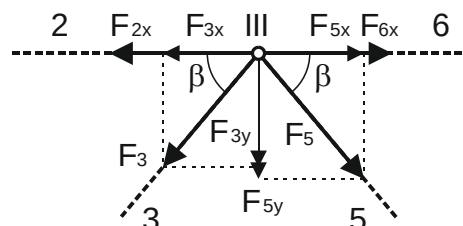
Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{2x} - F_{3x} + F_{5x} + F_{6x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{3y} - F_{5y} = 0$$



Velikost sil F_5 a F_6

$$F_{5y} = -F_{3y} = -(-272,7N) = 272,7N$$

$$F_{5x} = \frac{F_{5y}}{\tan \beta} = \frac{F_{5y}}{\frac{h}{\frac{b}{2}}} = \frac{F_{5y} \cdot b}{2 \cdot h} = \frac{272,7N \cdot 5000mm}{2 \cdot 3000mm} = 227,3N$$

$$F_5 = \sqrt{F_{5x}^2 + F_{5y}^2} = \sqrt{227,3N^2 + 272,7N^2} = 355N$$

$$F_6 = F_{6x} = F_{3x} + F_{2x} - F_{5x} = (-227,3N) + (-2772,7N) - 227,3N = -3227,3N$$

Ze znaménka výsledku síly F_6 je zřejmé, že její smysl je opačný oproti původnímu předpokladu.

Rovnováha sil působících na styčnick č. IV.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{4x} - F_{5x} + F_{7x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

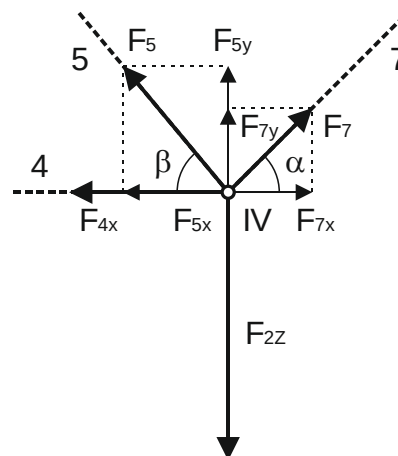
$$F_{5y} + F_{7y} - F_{2z} = 0$$

Velikost síly F_7

$$F_{7x} = F_{4x} + F_{5x} = 3000N + 227,3N = 3227,3N$$

$$F_{7y} = F_{2z} - F_{5y} = 3500N - 272,7N = 3227,3N$$

$$F_7 = \sqrt{F_{7x}^2 + F_{7y}^2} = \sqrt{3227,3N^2 + 3227,3N^2} = 4564,1N$$



Rovnováha sil působících na styčník č. V.

Řešení je uvedeno pouze pro kontrolu, protože velikosti a smysly sil jsou již známy z předchozích výpočtů.

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{6x} - F_{7x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

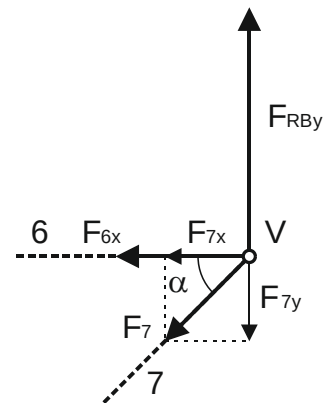
$$F_{RBy} - F_{7y} = 0$$

Velikost síly F_7

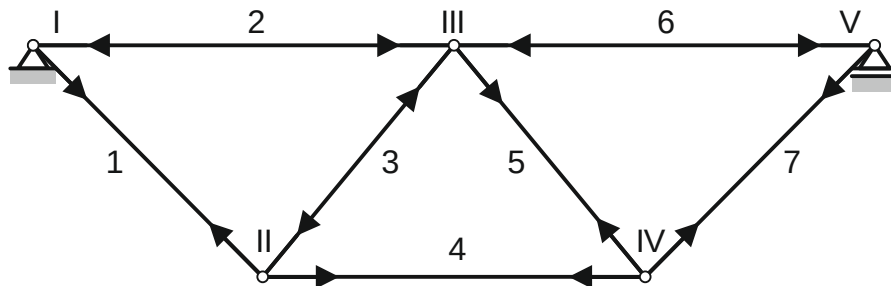
$$F_{7x} = -F_{6x} = -(-3227,3N) = 3227,3N$$

$$F_{7y} = F_{RBy} = 3227,3N$$

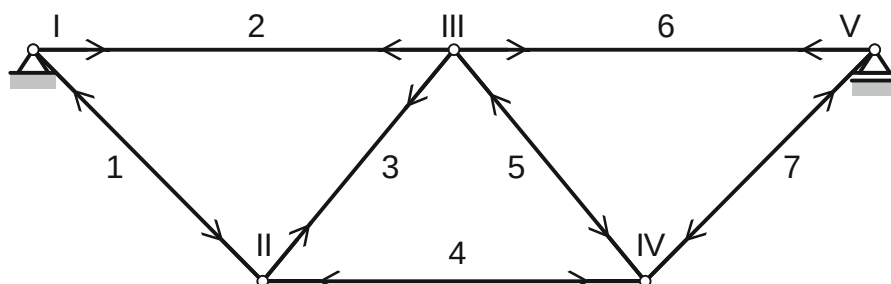
$$F_7 = \sqrt{F_{7x}^2 + F_{7y}^2} = \sqrt{3227,3N^2 + 3227,3N^2} = 4564,1N$$



Grafické znázornění skutečných smyslů sil působících na styčníky (po zohlednění znamének dílčích výsledků):



Grafické znázornění skutečných smyslů sil působících na pruty:



Síly působící na pruty mají stejný směr jako síly působící na styčníky, ale jejich smysl je opačný. Z těchto sil pak vycházíme při dimenzování prutů konstrukce. Ze smyslu sil v grafickém schématu je zřejmé, že pruty č. 1, 4, 5 a 7 jsou namáhány na tah a pruty č. 2, 3 a 6 jsou namáhány na tlak (vzpěr).

6.2.2 Metoda průsečná

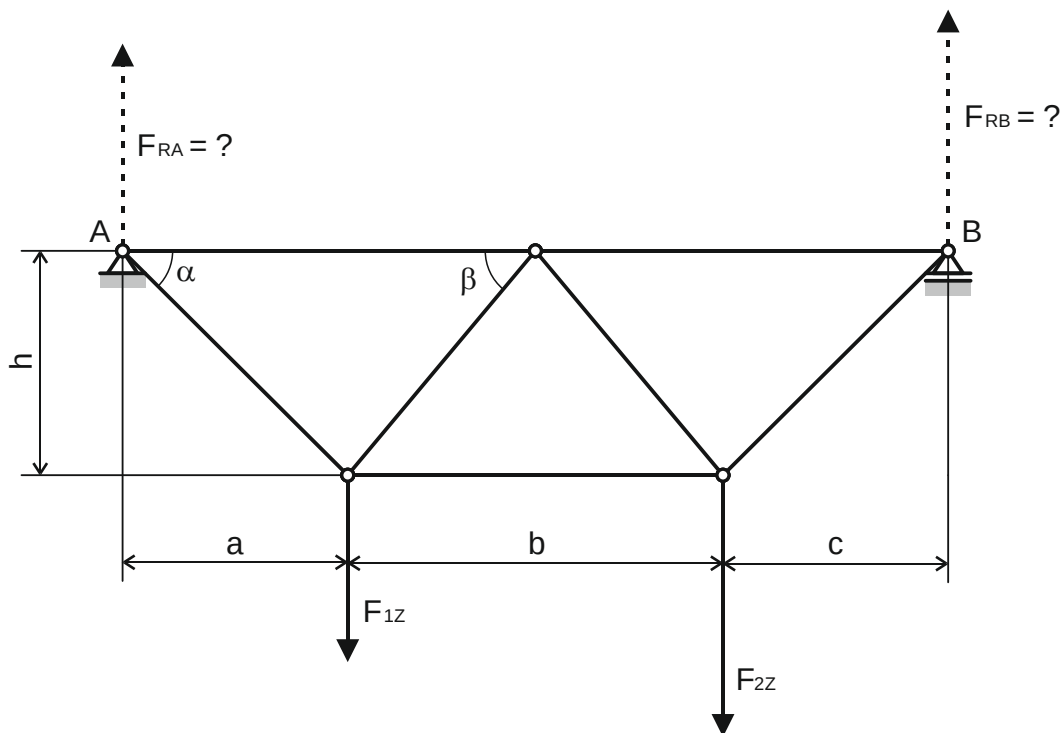
Princip této metody spočívá v tom, že prutovou konstrukci přeručíme myšlenými řezy tak, aby byly protnuty maximálně tři pruty. Z toho mohou být pouze dva pruty vycházející z jednoho styčníku s neznámými osovými silami. Při řešení předpokládáme smysl těchto neznámých osových sil působících na styčníky takový, že jednotlivé pruty jsou namáhány na tah. Jejich skutečný smysl a velikost pak určíme z podmínek rovnováhy sil a momentů v přerušených prutech.

Příklad:

Určete početní metodou průsečnou smysl a velikost osových sil v jednotlivých prutech.

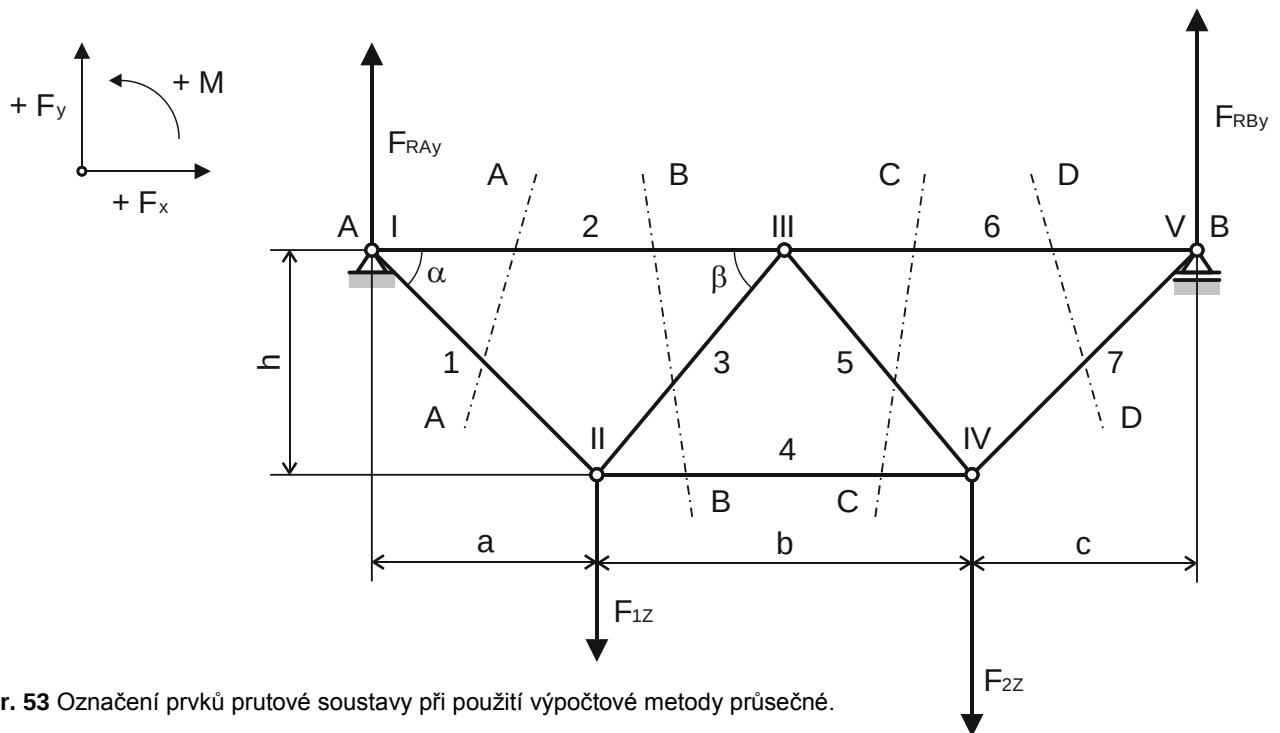
Zadané hodnoty:

$$F_{1Z} = 2500\text{N}, F_{2Z} = 3500\text{N}, a = c = h = 3000\text{mm}, b = 5000\text{mm}, \alpha = 45^\circ, \beta = 50,2^\circ$$



Řešení:

Nejprve zvolíme kladný smysl působení sil a momentů na prutové soustavě, očísloveme všechny pruty a označíme všechny styčníky římskými číslicemi. Dále vedeme řezy prutovou soustavou a to tak, aby byly protnuty maximálně tři pruty, z nichž mohou být pouze dva vycházející z jednoho styčníku s neznámými osovými silami (viz obr. 53). Při řešení předpokládáme smysl těchto neznámých osových sil působících na styčníky takový, že jednotlivé pruty jsou namáhány na tah. Nakonec určíme parametry reakcí a skutečný smysl a velikost osových sil působících v jednotlivých styčnicích.



Obr. 53 Označení prvků prutové soustavy při použití výpočtové metody průsečné.

Velikost reakcí F_{RAy} a F_{RBy}

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

V tomto směru se nevyskytují žádné síly, tzn., že podmínka je automaticky splněna.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_{1Z} - F_{2Z} + F_{RBy} = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_A = -F_{1Z} \cdot a - F_{2Z} \cdot (a + b) + F_{RBy} \cdot (a + b + c) = 0$$

$$-F_{1Z} \cdot a - F_{2Z} \cdot (a + b) + F_{RBy} \cdot (a + b + c) = 0 \Rightarrow F_{RBy} = \frac{F_{1Z} \cdot a + F_{2Z} \cdot (a + b)}{(a + b + c)} =$$

$$= \frac{2500N \cdot 3000mm + 3500N \cdot (3000mm + 5000mm)}{(3000mm + 5000mm + 3000mm)} = 3227,3N$$

$$F_{RAy} - F_{1Z} - F_{2Z} + F_{RBy} = 0 \Rightarrow F_{RAy} = F_{1Z} + F_{2Z} - F_{RBy} = 2500N + 3500N - 3227,3N = 2772,7N$$

Velikosti sil působících na jednotlivé styčníky:

Vyšetřování osových sil v řezu A – A:

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_2 + F_1 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_1 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

Všechny síly prochází jedním bodem, tzn., že podmínka je automaticky splněna.

Velikost sil F_1 a F_2

$$F_1 = \frac{F_{RAy}}{\sin \alpha} = \frac{2772,7N}{\sin 45^\circ} = 3921,2N$$

$$F_2 = -F_1 \cdot \cos \alpha = -3921,2N \cdot \cos 45^\circ = -2772,7N$$

Ze znaménka výsledku síly F_2 je zřejmé, že její smysl je opačný oproti původnímu předpokladu.

Vyšetřování osových sil v řezu B – B:

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_2 + F_3 \cdot \cos \beta + F_4 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RAy} - F_{1Z} + F_3 \cdot \sin \beta = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

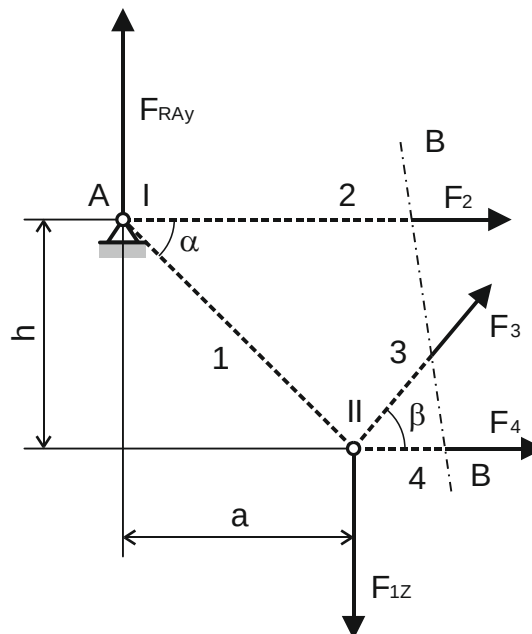
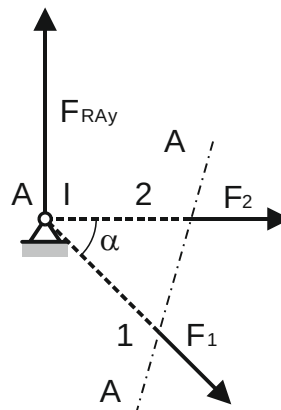
$$M_{II} = -F_{RAy} \cdot a - F_2 \cdot h = 0$$

Velikost sil F_3 a F_4

$$F_3 = \frac{F_{1Z} - F_{RAy}}{\sin \beta} = \frac{2500N - 2772,7N}{\sin 50,2^\circ} = -355N$$

$$F_4 = -F_2 - F_3 \cdot \cos \beta = -(-2772,7N) - (-355N \cdot \cos 50,2^\circ) = 3000N$$

Ze znaménka výsledku síly F_3 je zřejmé, že její smysl je opačný oproti původnímu předpokladu.



Vyšetřování osových sil v řezu C – C:

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_4 - F_5 \cdot \cos \beta - F_6 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RBy} + F_5 \cdot \sin \beta - F_{2Z} = 0$$

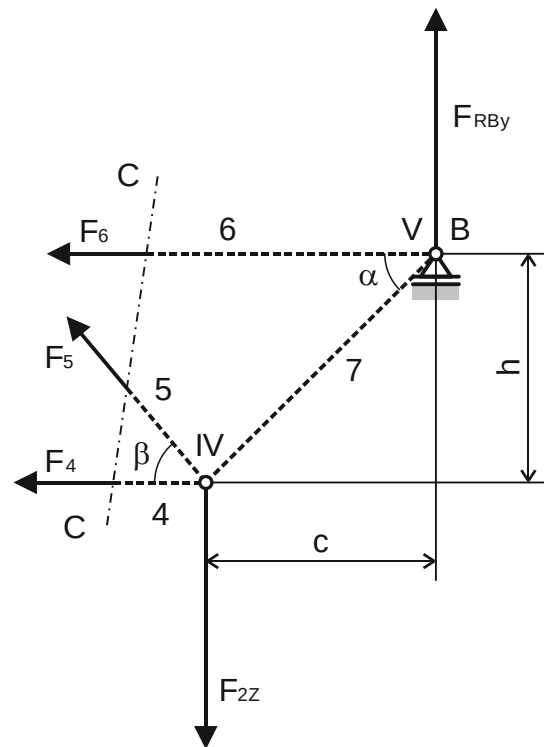
$$\Sigma M = 0$$

$$M_{IV} = F_{RBy} \cdot c + F_6 \cdot h = 0$$

Velikost sil F_5 a F_6

$$F_5 = \frac{F_{2Z} - F_{RBy}}{\sin \beta} = \frac{3500N - 3227,3N}{\sin 50,2^\circ} = 355N$$

$$F_6 = \frac{-F_{RBy} \cdot c}{h} = \frac{-3227,3N \cdot 3000mm}{3000mm} = -3227,3N$$



Ze znaménka výsledku síly F_6 je zřejmé, že její smysl je opačný oproti původnímu předpokladu.

Vyšetřování osových sil v řezu D – D:

Podmínky rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_6 - F_7 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{RBy} - F_7 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

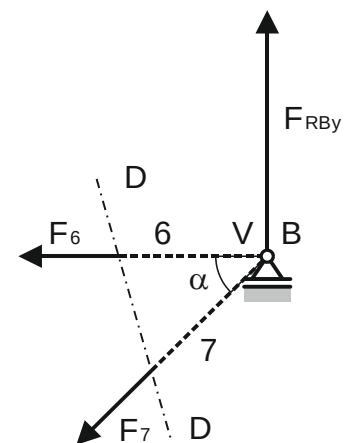
Všechny síly prochází jedním bodem, tzn., že podmínka je automaticky splněna.

Velikost síly F_7

$$F_7 = \frac{F_{RBy}}{\sin \alpha} = \frac{3227,3N}{\sin 45^\circ} = 4564,1N$$

pro kontrolu

$$F_7 = \frac{-F_6}{\cos \alpha} = \frac{-(-3227,3N)}{\cos 45^\circ} = 4564,1N$$



Ze znamének výsledků je zřejmé, že pruty č. 1, 4, 5 a 7 jsou namáhány na tah a pruty č. 2, 3 a 6 jsou namáhány na tlak (vzpěr).

6.3 Grafické metody řešení prutové soustavy

6.3.1 Metoda styčnicková

Grafická metoda styčnicková opět vychází z požadavku rovnováhy sil působících v jednotlivých styčnicích, což je prakticky stejné jako rovnováha soustavy sil se společným působištěm. Touto metodou jsme schopni řešit silové účinky působící na styčnící tam, kde máme maximálně dvě neznámé osové síly. Pro správné řešení je nutné zvolit vhodné měřítko sil a délek. Získané hodnoty pak s jejich pomocí převedeme zpět na reálné.

Příklad:

Určete grafickou metodou styčnickovou smysl a velikost osových sil v jednotlivých prutech.

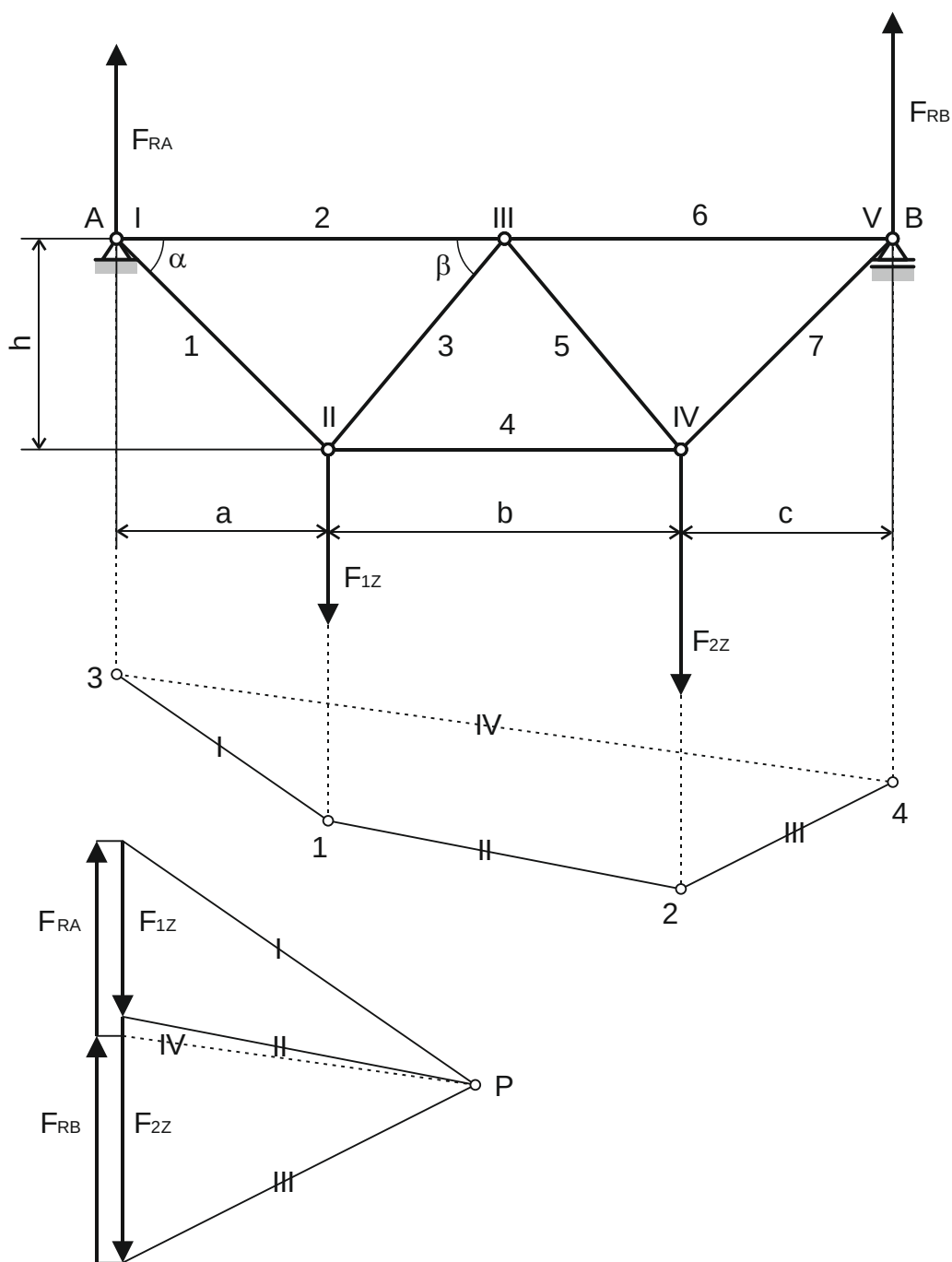
Zadané hodnoty:

$$F_{1Z} = 2500\text{N}, F_{2Z} = 3500\text{N}, a = c = h = 3000\text{mm}, b = 5000\text{mm}$$

Řešení:

Nejprve očíslováme všechny pruty a označíme všechny styčnící římskými číslicemi. Dále určíme pomocí pólového a vláknového obrazce velikosti a směry reakcí F_{RA} a F_{RB} . Poté řešíme graficky silové účinky na jednotlivých styčnicích. Reálné hodnoty velikosti osových sil působících na styčnící získáme přepočtem pomocí zvoleného měřítka sil.

Grafické určení reakcí:



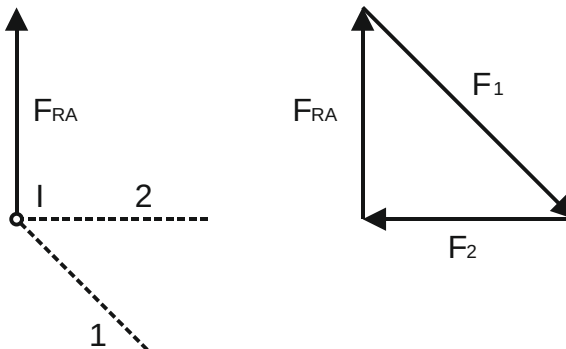
Měřítko délek $m_L = 100\text{mm.mm}^{-1}$

Měřítko sil $m_F = 100\text{N.mm}^{-1}$

Grafické určení silových účinků na styčnicích:

Měřítko sil $m_F = 100\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$

Rovnováha sil působících na styčnic č. I.

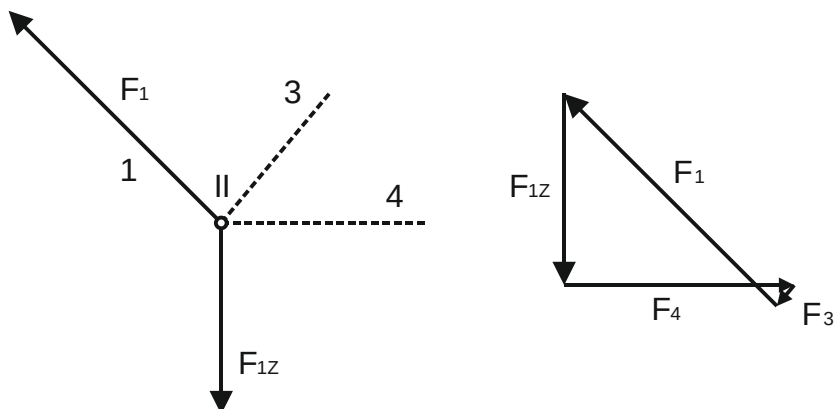


Velikost sil F_1 a F_2

$$F_1 = m_F \cdot l_{F_1} = 100\text{N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 39,2\text{mm} = 3920\text{N}$$

$$F_2 = m_F \cdot l_{F_2} = 100\text{N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 27,7\text{mm} = 2770\text{N}$$

Rovnováha sil působících na styčnic č. II.



Velikost sil F_3 a F_4

$$F_3 = m_F \cdot l_{F_3} = 100\text{N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 3,5\text{mm} = 350\text{N}$$

$$F_4 = m_F \cdot l_{F_4} = 100\text{N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 30\text{mm} = 3000\text{N}$$

Rovnováha sil působících na styčnic č. III.

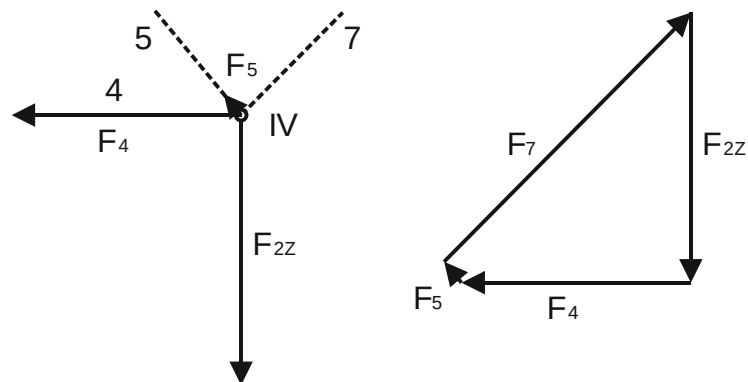


Velikost sil F_5 a F_6

$$F_5 = m_F \cdot l_{F5} = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 3,5 \text{ mm} = 350 \text{ N}$$

$$F_6 = m_F \cdot l_{F6} = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 32,3 \text{ mm} = 3230 \text{ N}$$

Rovnováha sil působících na styčník č. IV.

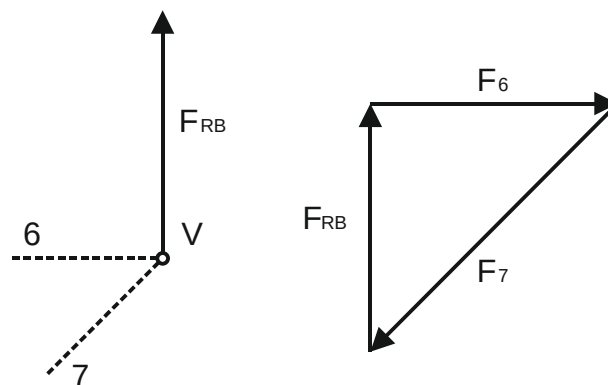


Velikost síly F_7

$$F_7 = m_F \cdot l_{F7} = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 45,6 \text{ mm} = 4560 \text{ N}$$

Rovnováha sil působících na styčník č. V.

Řešení je uvedeno pouze pro kontrolu, protože velikosti a smysly osových sil jsou již známy z předchozích grafických řešení rovnováhy sil působících na jednotlivé styčníky.



Velikost sil F_6 a F_7

$$F_6 = m_F \cdot l_{F6} = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 32,3 \text{ mm} = 3230 \text{ N}$$

$$F_7 = m_F \cdot l_{F7} = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 45,6 \text{ mm} = 4560 \text{ N}$$

Z výsledků grafického řešení, respektive ze smyslů osových sil působících na styčníky je zřejmé, že pruty č. 1, 4, 5 a 7 jsou namáhány na tah a pruty č. 2, 3 a 6 jsou namáhány na tlak (vzpěr).

6.3.2 Metoda Cremonova

Grafická metoda Cremonova opět vychází z požadavku rovnováhy sil působících v jednotlivých styčnících. Tato metoda vychází z grafické metody styčnickové s tím, že silové účinky na celé prutové konstrukci řešíme v jednom obrazci. Při použití této metody je nutné dodržovat určité zásady:

1. Prutovou konstrukci zakreslíme ve zvoleném měřítku délek a sil.
2. Očíslujeme všechny pruty a označíme všechny styčnicky římskými číslicemi.
3. Grafickou metodou určíme velikost a smysl reakcí.
4. Stanovíme smysl obcházení jednotlivých styčnicků při řešení silových účinků a tento dodržujeme u celé prutové soustavy.
5. Postupně řešíme rovnováhu sil působících na jednotlivé styčnicky v Cremonově obrazci, přičemž řešení je možné pouze tehdy, jsou-li neznámé maximálně dvě osové síly.
6. Znaménkem minus označujeme pruty namáhané tlakem (osová síla působí směrem do styčnicku) a znaménkem plus označujeme pruty namáhané tahem (osová síla působí směrem ze styčnicku).
7. Změříme velikosti osových sil v Cremonově obrazci a pomocí zvoleného měřítka je převedeme na reálné hodnoty. Tyto pak zaneseme do přehledné tabulky výsledků, která bude podkladem pro dimenzování jednotlivých prutů.

Příklad:

Určete grafickou metodou Cremonovou smysl a velikost osových sil v jednotlivých prutech.

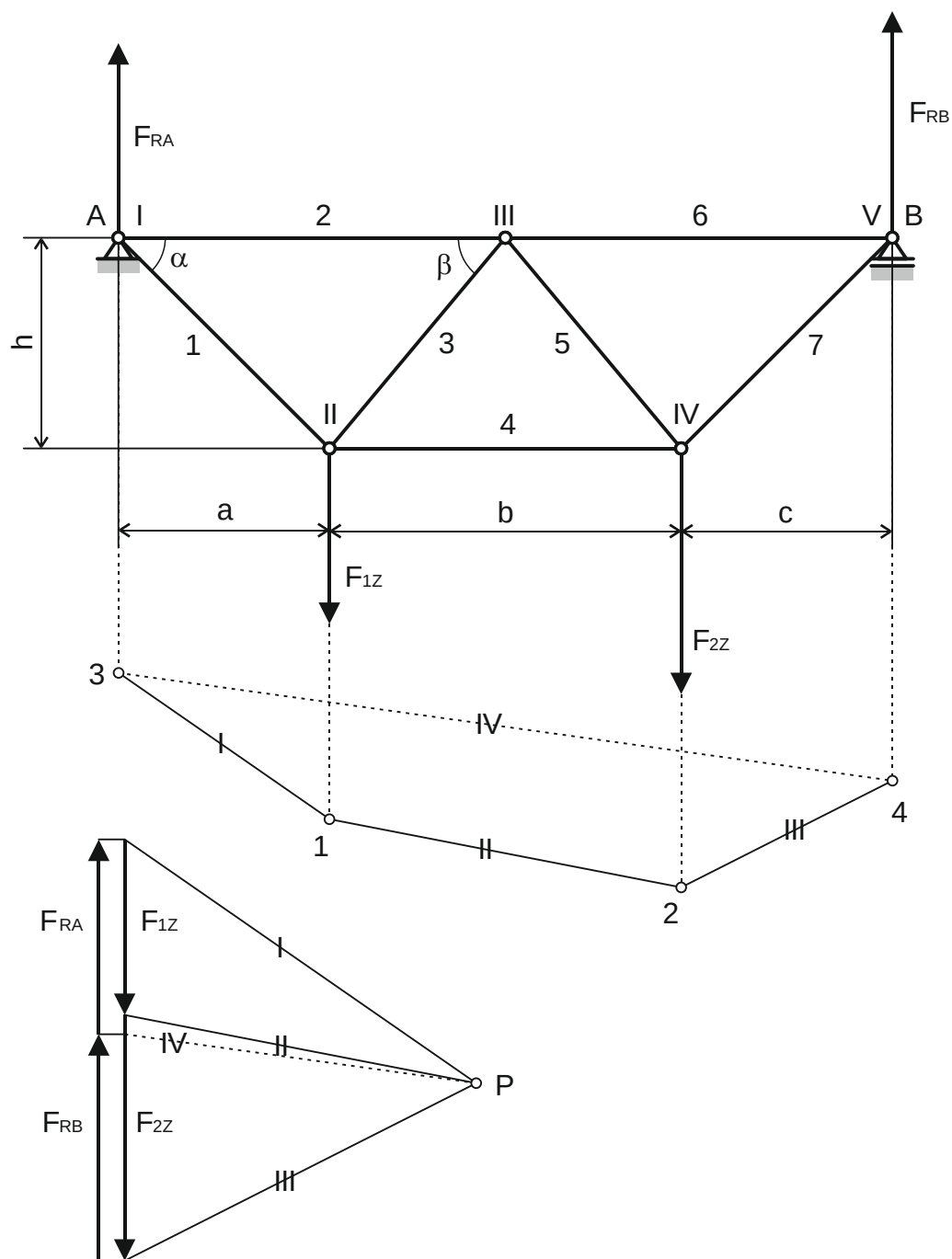
Zadané hodnoty:

$$F_{1Z} = 2500\text{N}, F_{2Z} = 3500\text{N}, a = c = h = 3000\text{mm}, b = 5000\text{mm}$$

Řešení:

Prutovou konstrukci zakreslíme ve zvoleném měřítku délek a sil. Očíslujeme všechny pruty a označíme všechny styčnicky římskými číslicemi. Pomocí pólového a vláknového obrazce určíme velikosti a směry reakcí F_{RA} a F_{RB} . Stanovíme smysl obcházení jednotlivých styčnicků při řešení úlohy. Postupně řešíme rovnováhu sil působících na jednotlivé styčnicky v Cremonově obrazci. Znaménkem minus označujeme pruty namáhané tlakem a znaménkem plus označujeme pruty namáhané tahem. Změříme velikosti osových sil v Cremonově obrazci a pomocí zvoleného měřítka je převedeme na reálné hodnoty. Tyto pak zaneseme do přehledné tabulky výsledků.

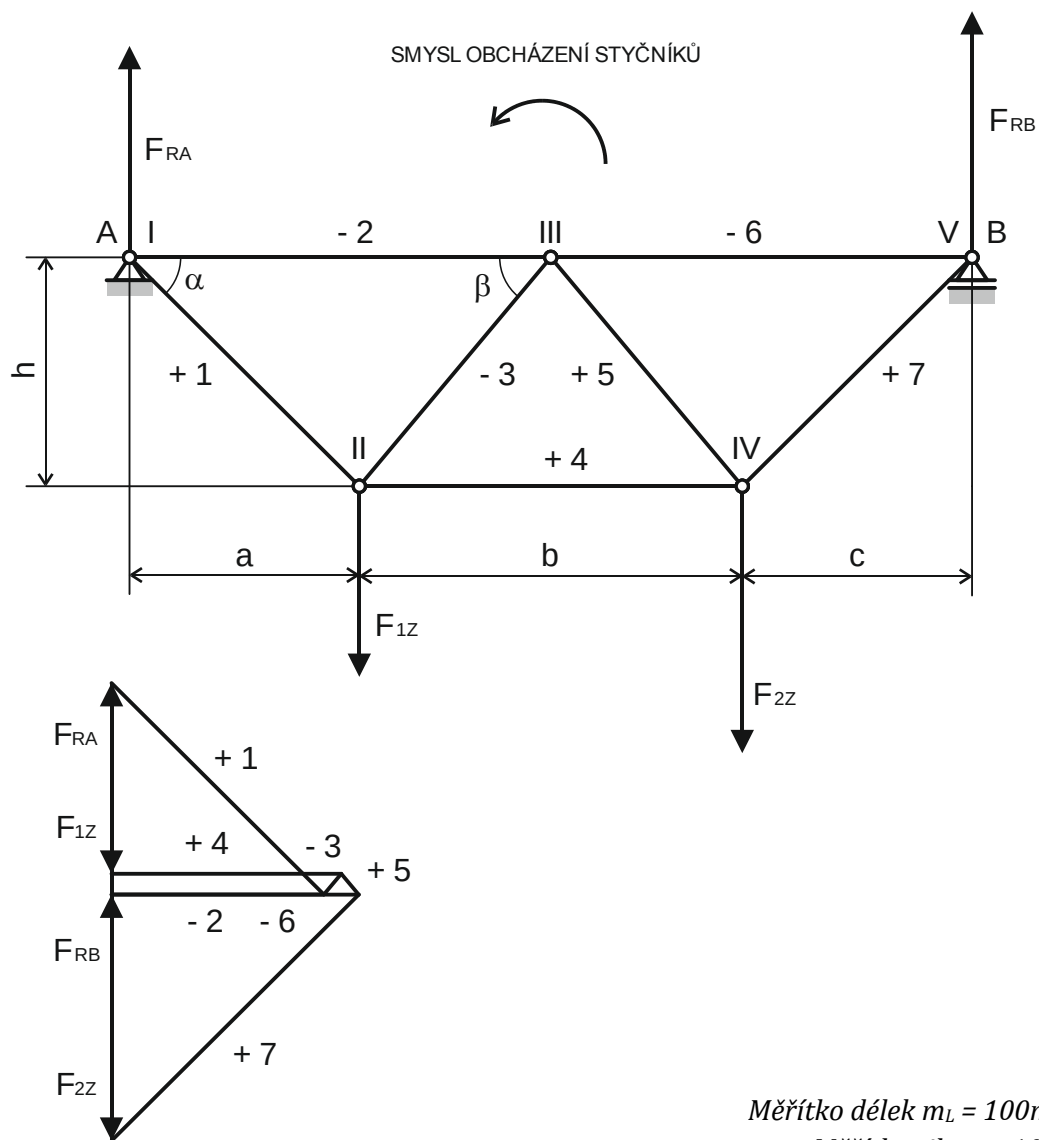
Grafické určení reakcí:



Měřítko délek $m_L = 100\text{mm.mm}^{-1}$

Měřítko sil $m_F = 100\text{N.mm}^{-1}$

Grafické určení osových sil prutové konstrukce pomocí Cremonova obrazce:



Velikosti sil F_1 až F_7

$$F_1 = m_F \cdot l_{F1} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 39,2\text{mm} = 3920\text{N}$$

$$F_2 = m_F \cdot l_{F2} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 27,7\text{mm} = 2770\text{N}$$

$$F_3 = m_F \cdot l_{F3} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 3,5\text{mm} = 350\text{N}$$

$$F_4 = m_F \cdot l_{F4} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 30\text{mm} = 3000\text{N}$$

$$F_5 = m_F \cdot l_{F5} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 3,5\text{mm} = 350\text{N}$$

$$F_6 = m_F \cdot l_{F6} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 32,3\text{mm} = 3230\text{N}$$

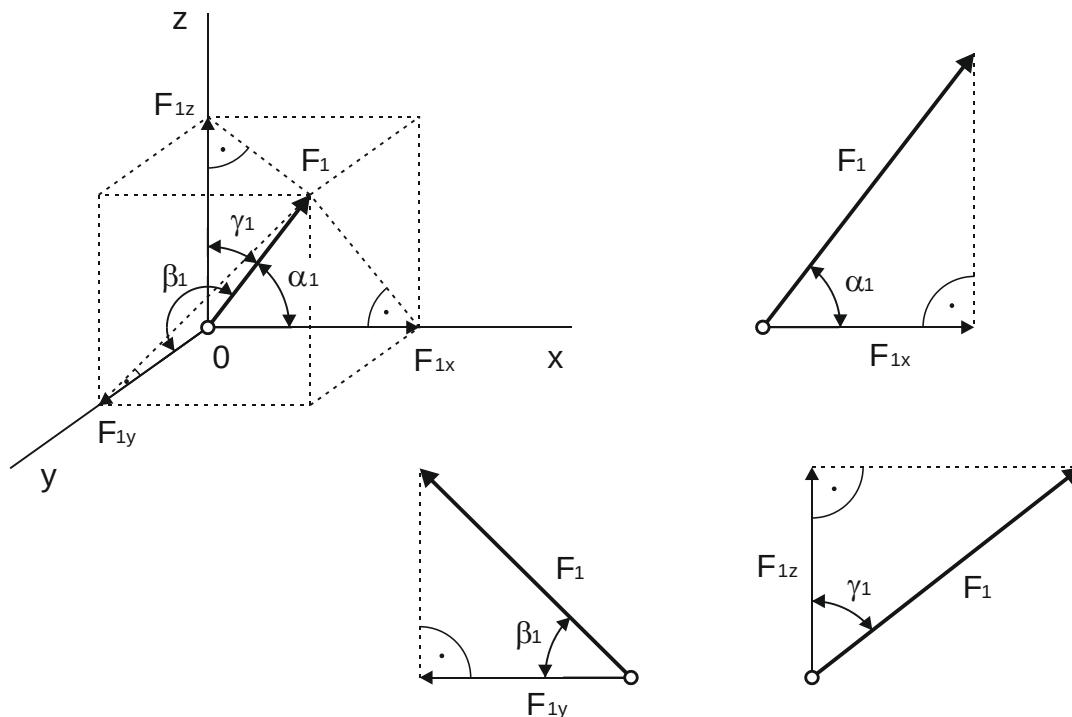
$$F_7 = m_F \cdot l_{F7} = 100\text{N.mm}^{-1} \cdot 45,6\text{mm} = 4560\text{N}$$

Prut č.	Osová síla (N)	Druh namáhání (tah „+“, tlak „-“)
1	3920	+
2	2770	-
3	350	-
4	3000	+
5	350	+
6	3230	-
7	4560	+

7. SOUSTAVA SIL V PROSTORU

7.1 Soustava sil se společným působišťem

Při určení výslednice soustavy několika sil se společným působišťem v prostoru postupujeme obdobně jako při určení výslednice soustavy sil v rovině. Nejprve však rozložíme jednotlivé síly do směrů os x , y a z (viz obr. 54)



Obr. 54 Rozklad síly F_1 do směrů os x , y a z .

K určení velikosti jednotlivých složek síly F_1 použijeme tři pravoúhlých trojúhelníků. Pak tedy platí:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 \quad (55)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \cos \beta_1 \quad (56)$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1 \quad (57)$$

Rozložíme-li takto celou soustavu sil o společném působišťi v prostoru, dostaneme tři soustavy sil (se stejným působišťem a směrem) vzájemně na sebe kolmých. Velikosti částečných výslednic ve směrech os x , y a z určíme stejně jako u soustavy sil v rovině, tj.:

$$F_{Vx} = \sum F_{ix} \quad (58)$$

$$F_{Vy} = \sum F_{iy} \quad (59)$$

$$F_{Vz} = \sum F_{iz} \quad (60)$$

Tyto částečné výslednice opět složíme v celkovou výslednici F_V a platí tedy vztah:

$$F_V = \sqrt{F_{Vx}^2 + F_{Vy}^2 + F_{Vz}^2} \quad (61)$$

Směr a smysl výslednice soustavy sil F_V (viz obr. 55) stanovíme opět z pravoúhlých trojúhelníků:

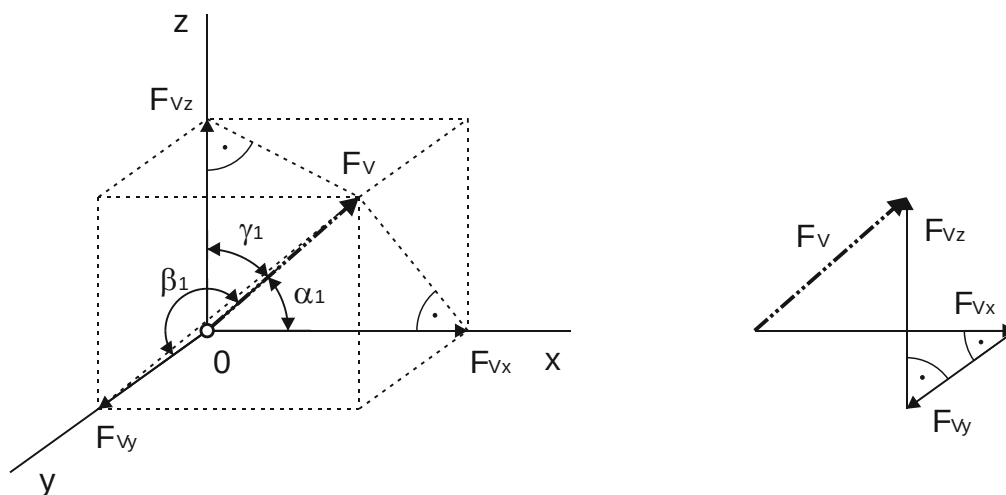
$$\cos \alpha = \frac{F_{Vx}}{F_V}$$

$$\cos \beta = \frac{F_{Vy}}{F_V}$$

$$\cos \gamma = \frac{F_{Vz}}{F_V}$$

a lze tedy velmi jednoduše dokázat, že platí:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (62)$$



Obr. 55 Směr, smysl a velikost výslednice soustavy sil (se společným působištěm) v prostoru.

7.2 Soustava sil, jež nemají společné působiště

Jedná se o velmi složitý případ. Velikost výslednice se určí obdobně jako u soustavy sil se společným působištěm. Nejprve tedy provedeme rozklad jednotlivých sil do směrů os x , y a z . Určíme dílčí výslednice F_{Vx} , F_{Vy} a F_{Vz} v jednotlivých směrech a tyto pak složíme na výslednici soustavy sil F_V . Její směr a smysl je dán úhly α , β a γ , neprochází však počátkem souřadného systému os x , y a z . To znamená, že tato výslednice způsobuje na určitém rameni r_V moment o velikosti $M = F_V \cdot r_V$ a tento je prostorově orientován.

7.3 Obecné podmínky, jež platí pro soustavu sil v prostoru

Vektorově je možné pro jakoukoliv soustavu sil v prostoru obecně definovat následující podmínky:

- pro výsledné účinky soustavy sil platí:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (63)$$

a

$$\vec{M}_V = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (64)$$

- pro podmínky rovnováhy soustavy sil platí:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \mathbf{0} \quad (65)$$

a

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \mathbf{0} \quad (66)$$

8. TĚŽIŠTĚ

Každé těleso se skládá z elementárních částic, tzv. hmotných bodů $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$, jež mají určitou hmotnost, projevující se tíhovou silou $G_1 = m_1 \cdot g$, $G_2 = m_2 \cdot g$, $G_3 = m_3 \cdot g \dots G_n = m_n \cdot g$. Těžištěm tělesa nazýváme bod, kterým prochází výslednice tíhových sil všech jeho hmotných bodů a to při jakémkoliv natočení tělesa. Ke zjišťování polohy těžiště tělesa je možné využít momentové věty (viz obr. 56) a platí, že součet momentů elementárních tíhových sil ke zvolenému bodu je roven momentu výsledné tíhové síly k témuž bodu. Matematicky je možné to vyjádřit následujícím vztahem:

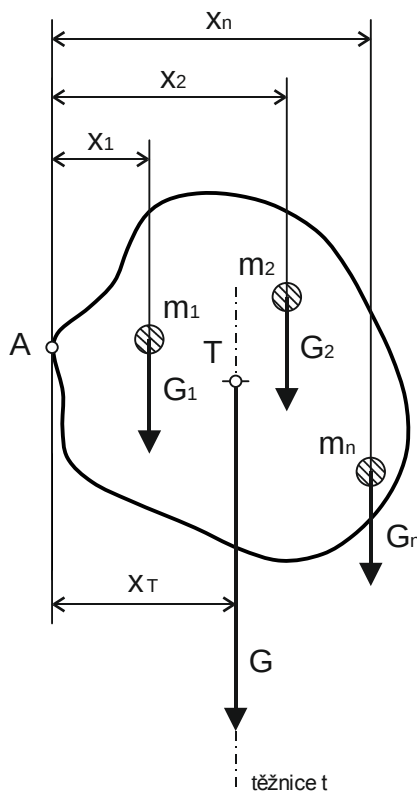
$$M = \sum_{i=1}^n M_i = G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3 + \dots + G_n \cdot x_n = G \cdot x_T \quad (67)$$

kde:

$G_1 \dots G_n$	jsou tíhové síly elementárních částic
$x_1 \dots x_n$	jsou polohy těžišť elementárních částic ke zvolenému bodu
G	je tíhová síla tělesa
x_T	je poloha těžiště tělesa ke zvolenému bodu

Odtud poloha těžiště tělesa x_T vzhledem ke zvolenému bodu bude rovna:

$$x_T = \frac{G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3 + \dots + G_n \cdot x_n}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \cdot x_i}{G} \quad (68)$$



Obr. 56 Poloha těžiště tělesa ke zvolenému bodu A.

V technické praxi kromě těžiště těles určujeme i těžiště čar a ploch, ačkoli nemají hmotnost a tedy ani tíhovou sílu. Při zjišťování jejich těžiště využíváme tzv. proporčních sil úměrných jejich délce či obsahu.

8.1 Těžiště čar

Při určování těžiště obecné čáry postupujeme tak, že ji rozdělíme na malé úseky, které zjednodušeně považujeme za úsečkové. V těžištích takovýchto úseků, které jsou vždy uprostřed jejich délky, zavedeme proporční síly úměrné délce úseků a to minimálně ve dvou směrech. Vzniknou nám tak dvě soustavy rovnoběžných sil, kde se nositelky jejich výslednic protínají v těžišti čáry T. Čím menší budou úseky, na které vyšetřovanou čáru rozdělíme (platí pro nelineární části čáry), tím přesnější bude určení polohy jejího těžiště T.

8.1.1 Početní metoda určení polohy těžiště

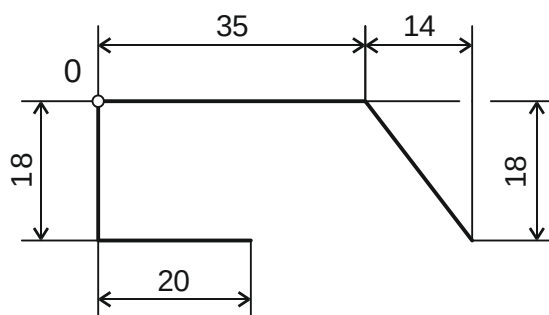
Při určení polohy těžiště vyšetřované čáry, vycházíme z momentové věty. Postup při řešení je následující:

1. Zvolíme libovolně dva směry působení proporčních sil a jejich počátek. Tyto směry je vhodné volit totožné se směry souřadnicových os x a y .
2. Čáru rozdělíme na lineární a přibližně lineární úseky a určíme souřadnice jejich těžišť. V těchto těžištích necháme působit proporční síly ve zvolených směrech, přičemž jejich velikost bude úměrná délce jednotlivých úseků.
3. Odhadneme přibližně polohu těžiště celé čáry a zakótujeme ji vzhledem k počátku zvolených směrů. V tomto místě necháme působit sílu, jejíž velikost bude přímo úměrná celé délce čáry.
4. S využitím momentové věty stanovíme polohu těžiště vyšetřované čáry.

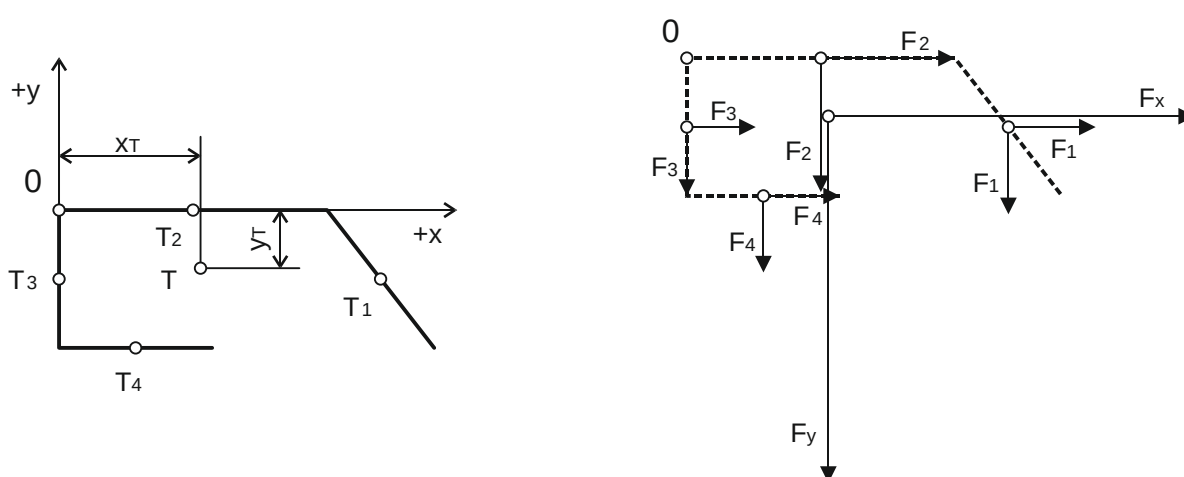
Příklad:

Určete početní metodou polohu těžiště zadané čáry vzhledem k bodu 0.

Grafické zadání:



Řešení:



Obr. 57 Grafické znázornění parametrů početního řešení určení polohy těžiště zadané čáry.

Stanovení velikosti proporčních sil.

$$F_i \approx l_i$$

Souřadnice těžišť dílčích úseků

Úsek č.	Souřadnice x_i (mm)	Souřadnice y_i (mm)
1	42	-9
2	17,5	0
3	0	-9
4	10	-18

Poloha těžiště čáry

$$F_y \cdot x_T = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_4 \cdot x_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_4 \cdot x_4}{F_y} = \frac{\sqrt{14^2 + 18^2} N \cdot 42 \text{ mm} + 35 N \cdot 17.5 \text{ mm} + 20 N \cdot 10 \text{ mm}}{95,8 N} = 18,48 \text{ mm}$$

$$F_x \cdot y_T = F_1 \cdot y_1 + F_3 \cdot y_3 + F_4 \cdot y_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_T = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_3 \cdot y_3 + F_4 \cdot y_4}{F_x} = \frac{\sqrt{14^2 + 18^2} N \cdot (-9 \text{ mm}) + 18 N \cdot (-9 \text{ mm}) + 20 N \cdot (-18 \text{ mm})}{95,8 N} = -7,59 \text{ mm}$$

8.1.2 Grafická metoda určení polohy těžiště

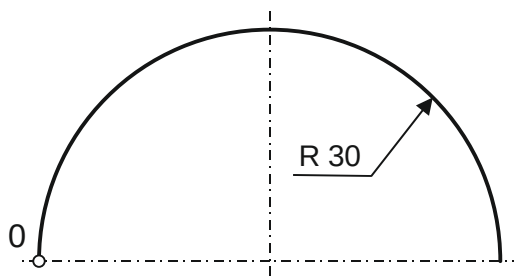
Při určení polohy těžiště vyšetřované čáry, vycházíme z určení výslednic soustav rovnoběžných sil. Postup při řešení je následující:

1. Zvolíme libovolně dva směry působení proporčních sil a jejich počátek. Tyto směry je vhodné volit totožné se směry souřadnicových os x a y .
2. Čáru rozdělíme na lineární a přibližně lineární úseky a určíme polohy jejich těžišť. V těchto těžištích necháme působit proporční síly ve zvolených směrech, přičemž jejich velikost bude úměrná délce jednotlivých úseků.
3. Graficky určíme pomocí pólového a vláknového obrazce výslednice soustav proporčních sil ve zvolených směrech. V průsečíku jejich nositelek pak leží těžiště vyšetřované čáry.
4. Odměříme polohu těžiště vzhledem k počátku zvolených směrů.

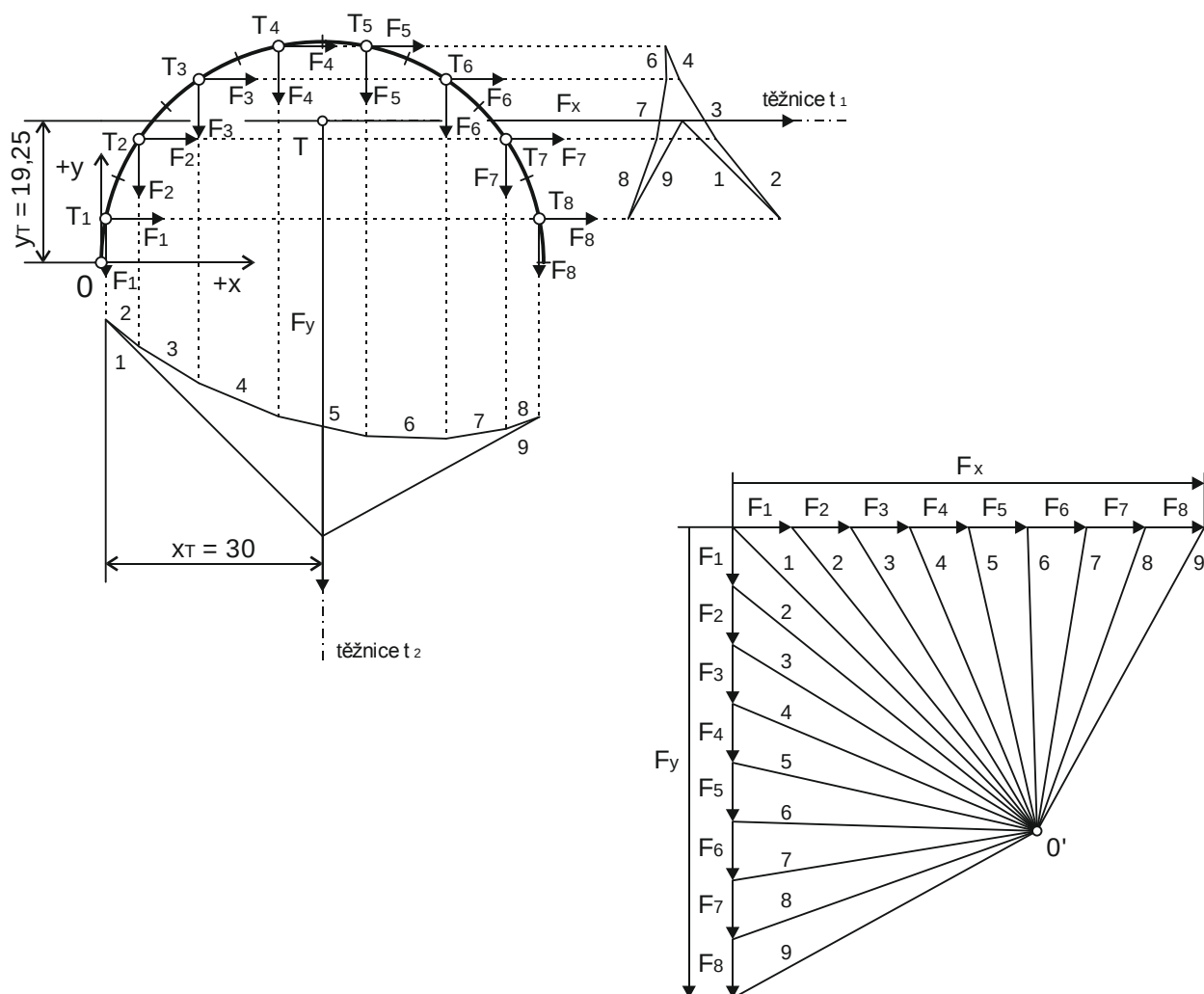
Příklad:

Určete grafickou metodou polohu těžiště zadané čáry vzhledem k bodu 0.

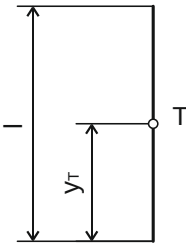
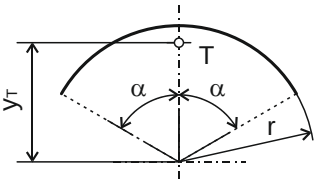
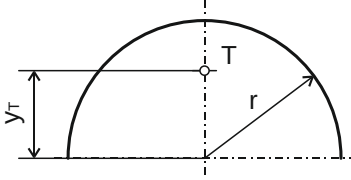
Grafické zadání:



Řešení:



8.1.3 Poloha těžiště vybraných typů čar

Úsečka	Oblouk	Půlkružnice
		
$y_T = \frac{l}{2}$	$y_T = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha}$	$y_T = \frac{2}{\pi} \cdot r$
Pozn.:	$\text{arc } \alpha = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$	

8.2 Těžiště ploch

Při určování těžiště obecné plochy postupujeme tak, že ji rozdělíme na malé úseky, které zjednodušeně považujeme za obdélníkové. V těžištích takovýchto úseků, které jsou vždy v průsečíku úhlopříček, zavedeme proporční síly úměrné obsahu úseků a to minimálně ve dvou směrech. Vzniknou nám tak dvě soustavy rovnoběžných sil, kde se nositelky jejich výslednic protínají v těžišti plochy T. Čím menší budou úseky, na které vyšetřovanou plochu rozdělíme (platí pro části plochy, jež nemají obdélníkový charakter), tím přesnější bude určení polohy jejího těžiště T.

8.2.1 Početní metoda určení polohy těžiště

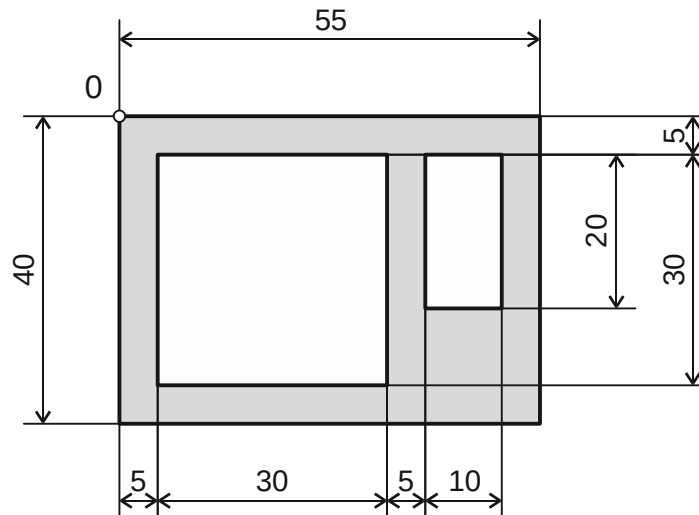
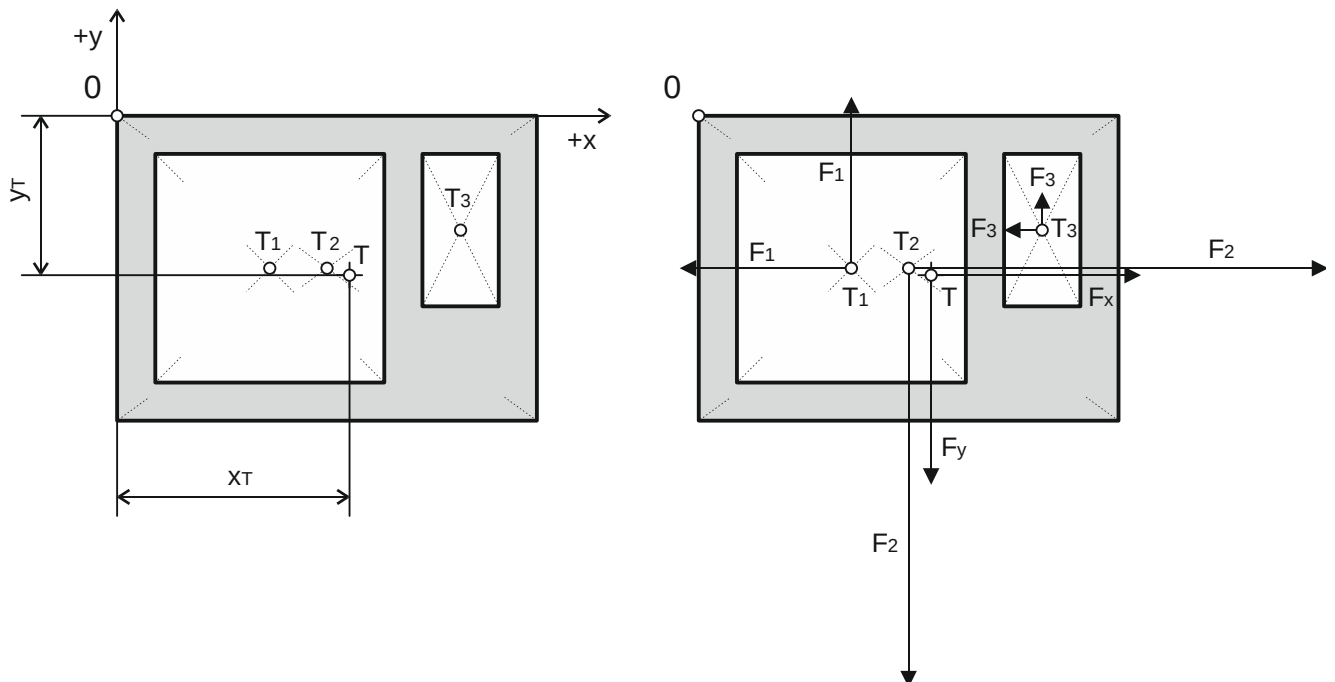
Při určení polohy těžiště vyšetřované plochy, vycházíme z momentové věty. Postup při řešení je následující:

1. Zvolíme libovolně dva směry působení proporčních sil a jejich počátek. Tyto směry je vhodné volit totožné se směry souřadnicových os x a y.
2. Plochu rozdělíme na obdélníkové úseky a určíme souřadnice jejich těžišť. V těchto těžištích necháme působit proporční síly ve zvolených směrech, přičemž jejich velikost bude úměrná obsahu jednotlivých úseků.
3. Odhadneme přibližně polohu těžiště celé plochy a zakótujeme ji vzhledem k počátku zvolených směrů. V tomto místě necháme působit sílu, jejíž velikost bude přímo úměrná celému obsahu plochy.
4. S využitím momentové věty stanovíme polohu těžiště vyšetřované plochy.

Příklad:

Určete početní metodou polohu těžiště zadané plochy vzhledem k bodu 0.

Grafické zadání:


Řešení:


Obr. 58 Grafické znázornění parametrů početního řešení určení polohy těžiště zadané plochy.

Stanovení velikosti proporčních sil.

$$F_i \approx S_i$$

Souřadnice těžišť dílčích úseků

Úsek č.	Souřadnice x_i (mm)	Souřadnice y_i (mm)
1	20	-20
2	27,5	-20
3	45	-15

Poloha těžiště plochy

$$F_y \cdot x_T = -F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{-F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3}{F_y} = \frac{-30.30N \cdot 20mm + 55.40N \cdot 27,5mm - 10.20N \cdot 45mm}{1100N} = 30,45mm$$

$$F_x \cdot y_T = -F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_T = \frac{-F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3}{F_x} = \frac{-30.30N \cdot (-20)mm + 55.40N \cdot (-20)mm - 10.20N \cdot (-15)mm}{1100N} = -20,91mm$$

8.2.2 Grafická metoda určení polohy těžiště

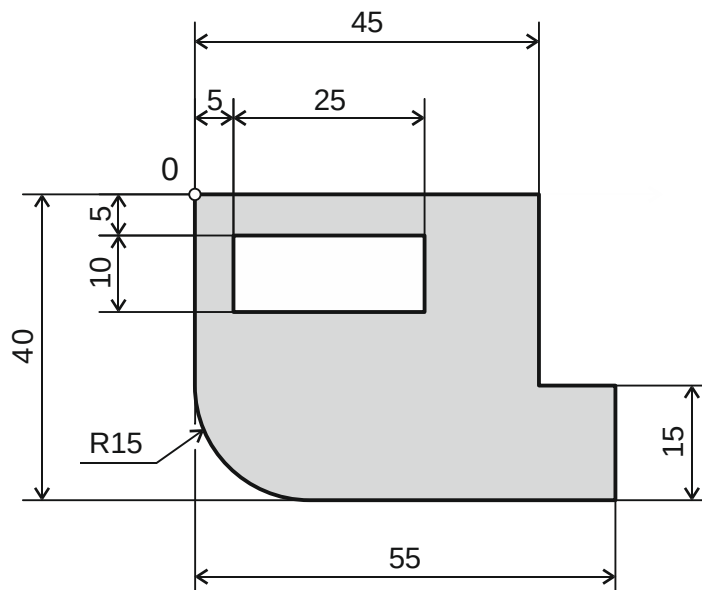
Při určení polohy těžiště vyšetřované plochy, vycházíme z určení výslednic soustav rovnoběžných sil. Postup při řešení je následující:

1. Zvolíme libovolně dva směry působení proporčních sil a jejich počátek. Tyto směry je vhodné volit totožné se směry souřadnicových os x a y .
2. Plochu rozdělíme na obdélníkové úseky a určíme polohu jejich těžišť. V těchto těžištích necháme působit proporční síly ve zvolených směrech, přičemž jejich velikost bude úměrná obsahu jednotlivých úseků.
3. Graficky určíme pomocí pólového a vláknového obrazce výslednice soustav proporčních sil ve zvolených směrech. V průsečíku jejich nosítek pak leží těžiště vyšetřované plochy.
4. Odměříme polohu těžiště vzhledem k počátku zvolených směrů.

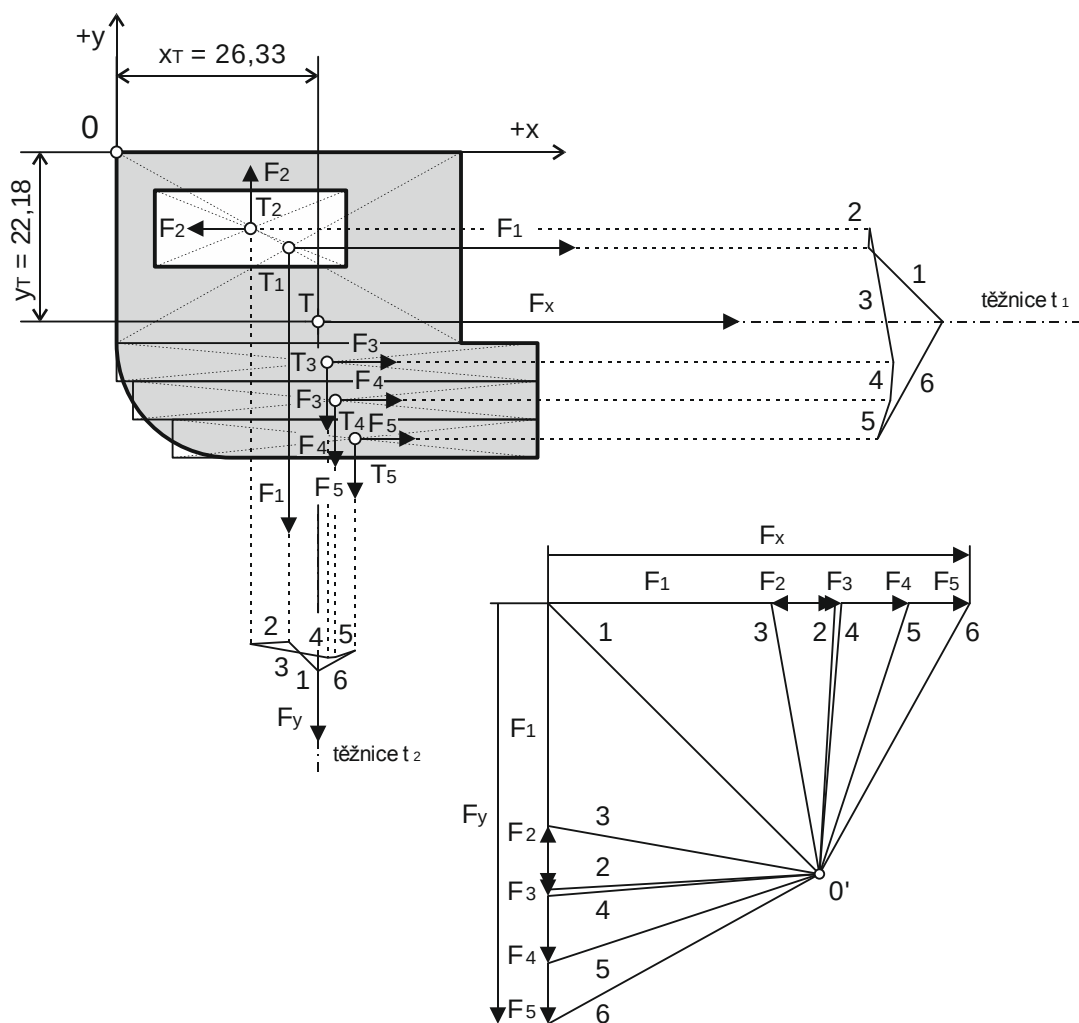
Příklad:

Určete grafickou metodou polohu těžiště zadané plochy vzhledem k bodu 0.

Grafické zadání:



Řešení:



8.2.3 Poloha těžiště vybraných typů ploch

Obdélník	Trojúhelník	Kruhová úseč
$y_T = \frac{h}{2} \quad x_T = \frac{b}{2}$	$y_T = \frac{h}{3}$	$y_T = \frac{2 \cdot r \cdot \sin^3 \alpha}{3 \cdot (\arcsin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}$
Kruhová výseč	Půlkruh	Plášť kulové vrstvy
$y_T = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \arcsin \alpha}$	$y_T = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$	$y_T = \frac{h}{2}$
Polovina parabolické plochy	Parabolická plocha	Lichoběžník
$y_T = \frac{3}{5} \cdot h \quad x_T = \frac{3}{8} \cdot b$	$y_T = \frac{3}{5} \cdot h$	$y_T = \frac{h \cdot (2 \cdot a + b)}{3 \cdot (a + b)}$

8.3 Těžiště těles

Při určování těžiště tělesa postupujeme tak, že jej rozdělíme na malé úseky, které zjednodušeně považujeme za válcové, nebo kvádrové. V těžištích takovýchto úseků, které jsou vždy v polovině výšky (u válce), nebo ve středu úhlopříček (u kvádrů), zavedeme proporční síly úměrné objemu úseků. Pokud se jedná o symetrické těleso, řešíme úlohu pouze v jedné rovině a to v rovině symetrie. Postup je pak obdobný, jako při určování polohy těžiště čar a ploch. Jestliže těleso symetrické není, řešíme úlohu ve dvou na sebe vzájemně kolmých rovinách. Vzniknou nám tak dvě, případně tři soustavy rovnoběžných sil a jejich postupným řešením stanovíme polohu těžiště tělesa T . Čím menší budou objemové úseky, na které vyšetřované těleso rozdělíme (platí pro části tělesa jež nemají charakter válce ani kvádrů), tím přesnější bude určení polohy jeho těžiště T .

8.3.1 Početní metoda určení polohy těžiště symetrického tělesa

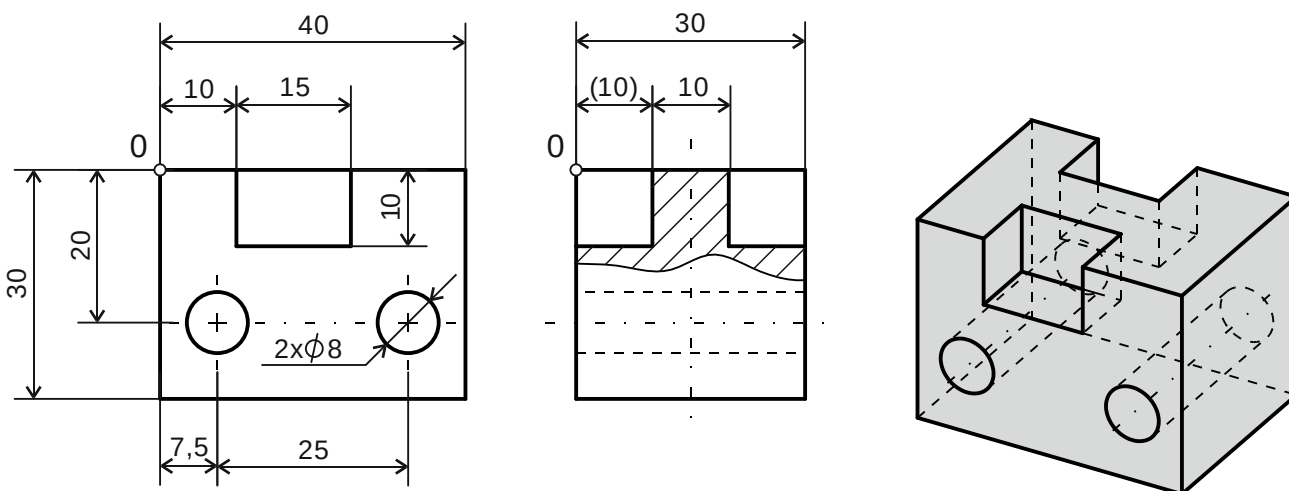
Při určení polohy těžiště, vycházíme z momentové věty. Jelikož se jedná o těleso symetrické, řešíme úlohu pouze v jedné rovině a to v rovině symetrie. Zde leží těžiště vyšetřovaného tělesa a je tudíž známa jedna ze souřadnic jeho polohy. Postup při určení zbývajících dvou souřadnic je následující:

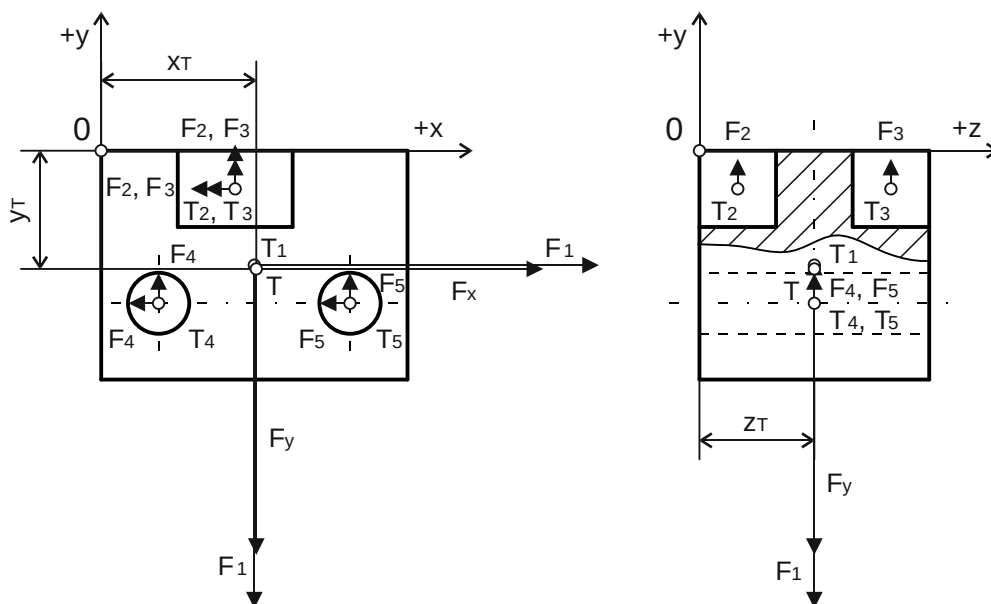
1. V rovině symetrie zvolíme libovolně dva směry působení proporčních sil a jejich počátek. Tyto směry je vhodné volit totožné se směry souřadnicových os x a y .
2. Těleso rozdělíme na válcové či kvádrové úseky a určíme souřadnice jejich těžišť. V těchto těžištích necháme působit proporční síly ve zvolených směrech, přičemž jejich velikost bude úměrná objemu jednotlivých úseků.
3. Odhadneme přibližně polohu těžiště celého tělesa a zakótujeme ji vzhledem k počátku. V tomto místě necháme působit sílu, jejíž velikost bude přímo úměrná celému objemu tělesa.
4. S využitím momentové věty stanovíme polohu těžiště vyšetřovaného tělesa.

Příklad:

Určete početní metodou polohu těžiště zadaného tělesa vzhledem k bodu 0.

Grafické zadání:



Řešení:**Obr. 59** Grafické znázornění parametrů početního řešení určení polohy těžiště zadaného symetrického tělesa.

Stanovení velikosti proporčních sil.

$$F_i \approx V_i$$

Souřadnice těžišť dílčích úseků

Úsek č.	Souřadnice x_i (mm)	Souřadnice y_i (mm)
1	20	-15
2	17,5	-5
3	17,5	-5
4	7,5	-20
5	32,5	-20

Poloha těžiště tělesa

$$F_y \cdot x_T = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3 - F_4 \cdot x_4 - F_5 \cdot x_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3 - F_4 \cdot x_4 - F_5 \cdot x_5}{F_y}$$

$$\begin{aligned}
 & 40.30.30N.20mm - 15.10.10N.17,5mm - 15.10.10N.17,5mm - \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \cdot 30N.7,5mm \\
 & - \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \cdot 30N.32,5mm \\
 & = \frac{\quad}{29984N} = 20,25mm
 \end{aligned}$$

$$F_x \cdot y_T = F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3 - F_4 \cdot y_4 - F_5 \cdot y_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_T = \frac{F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3 - F_4 \cdot y_4 - F_5 \cdot y_5}{F_x}$$

$$= \frac{40 \cdot 30 \cdot 30 \text{ N} \cdot (-15) \text{ mm} - 15 \cdot 10 \cdot 10 \text{ N} \cdot (-5) \text{ mm} - 15 \cdot 10 \cdot 10 \text{ N} \cdot (-5) \text{ mm} - \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \cdot 30 \text{ N} \cdot (-20) \text{ mm} - \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \cdot 30 \text{ N} \cdot (-20) \text{ mm}}{29984 \text{ N}} = -15,5 \text{ mm}$$

8.3.2 Početní metoda určení polohy těžiště nesymetrického tělesa

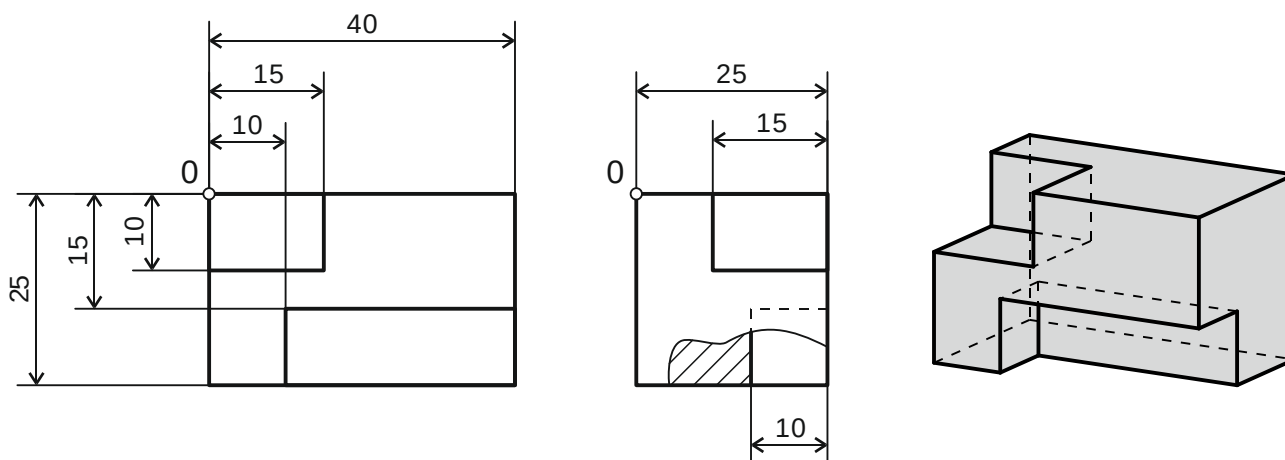
Při určení polohy těžiště vyšetřovaného tělesa, vycházíme opět z momentové věty. Postup při řešení je následující:

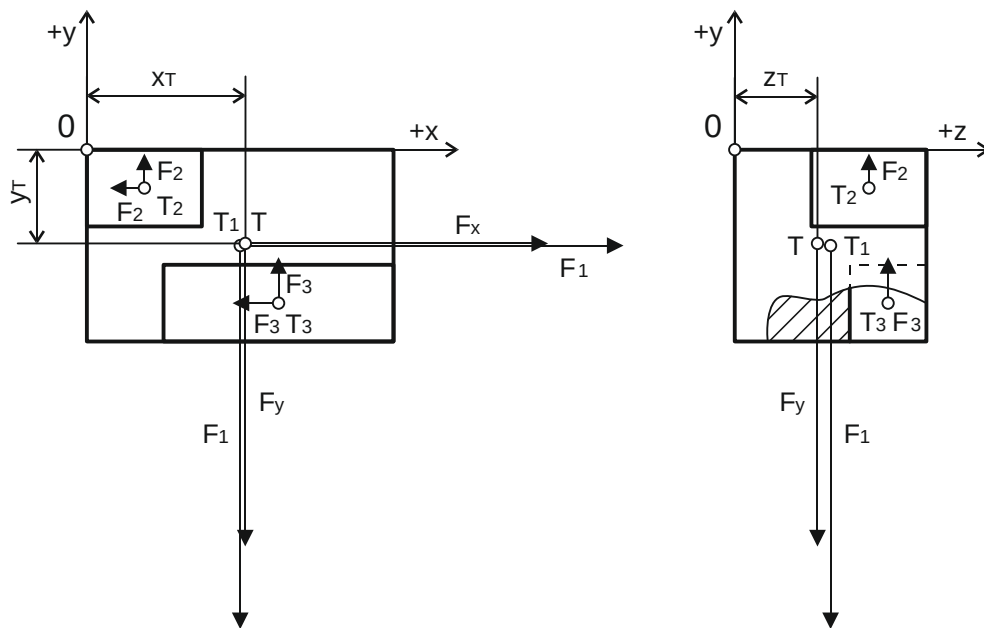
1. Zvolíme dvě na sebe kolmé roviny (ve kterých budeme určovat polohu těžiště tělesa T) a jejich počátek.
2. V jedné z rovin zvolíme libovolně dva směry působení proporčních sil. Tyto směry je vhodné volit totožné se směry souřadnicových os x a y.
3. V druhé rovině zvolíme směr působení proporčních sil takový, aby bylo možné následným řešením určit třetí souřadnici polohy těžiště tělesa T.
4. Těleso rozdělíme na válcové či kvádrové úseky a určíme souřadnice jejich těžišť. V těchto těžištích necháme působit proporční síly ve zvolených směrech, přičemž jejich velikost bude úměrná objemu jednotlivých úseků.
5. Odhadneme přibližně polohu těžiště celého tělesa a zakótujeme ji vzhledem k počátku rovin. V tomto místě necháme působit sílu, jejíž velikost bude přímo úměrná celému objemu tělesa.
6. S využitím momentové věty stanovíme polohu těžiště vyšetřovaného tělesa.

Příklad:

Určete početní metodou polohu těžiště zadaného tělesa vzhledem k bodu 0.

Grafické zadání:



Řešení:**Obr. 60** Grafické znázornění parametrů početního řešení určení polohy těžiště zadaného nesymetrického tělesa.

Stanovení velikosti proporčních sil.

$$F_i \approx V_i$$

Souřadnice těžišť dílčích úseků

Úsek č.	Souřadnice x_i (mm)	Souřadnice y_i (mm)	Souřadnice z_i (mm)
1	20	-12,5	12,5
2	7,5	-5	17,5
3	25	-20	20

Poloha těžiště tělesa

$$F_y \cdot x_T = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3}{F_y}$$

$$= \frac{40 \cdot 25 \cdot 25 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm} - 15 \cdot 10 \cdot 15 \text{ N} \cdot 7,5 \text{ mm} - 30 \cdot 10 \cdot 10 \text{ N} \cdot 25 \text{ mm}}{19750 \text{ N}} = 20,66 \text{ mm}$$

$$F_x \cdot y_T = F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_T = \frac{F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3}{F_x}$$

$$= \frac{40 \cdot 25 \cdot 25 \text{ N} \cdot (-12,5) \text{ mm} - 15 \cdot 10 \cdot 15 \text{ N} \cdot (-5) \text{ mm} - 30 \cdot 10 \cdot 10 \text{ N} \cdot (-20) \text{ mm}}{19750 \text{ N}} = -12,22 \text{ mm}$$

$$F_y \cdot z_T = F_1 \cdot z_1 - F_2 \cdot z_2 - F_3 \cdot z_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_T = \frac{F_1 \cdot z_1 - F_2 \cdot z_2 - F_3 \cdot z_3}{F_y}$$

$$= \frac{40.25.25N.12,5mm - 15.10.15N.17,5mm - 30.10.10N.20mm}{19750N} = 10,79mm$$

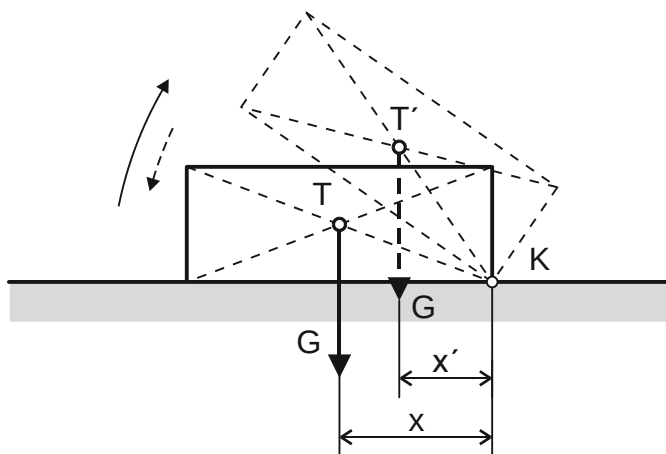
8.3.3 Poloha těžiště vybraných typů těles

Kvádr	Válec	Kužel (jehlan)
$y_T = \frac{c}{2} \quad x_T = \frac{a}{2}$	$x_T = \frac{h}{2}$	$y_T = \frac{h}{4}$
Kulová výseč	Kulová úseč (vrchlík)	Polokoule
$y_T = \frac{3}{8} \cdot r \cdot (1 + \cos \alpha)$	$y_T = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2 \cdot r - h)^2}{(3 \cdot r - h)}$	$y_T = \frac{3}{8} \cdot r$
Rotační paraboloid	Klín	
$y_T = \frac{h}{3}$	$y_T = \frac{h \cdot (a + c)}{2 \cdot (2 \cdot a + c)}$	

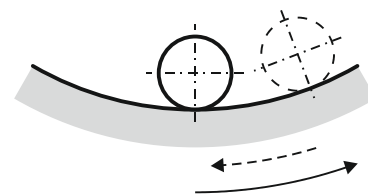
9. STABILITA TĚLESA

Těleso nebo soustava těles mohou být v poloze **stabilní** (rovnovážné), **labilní** (vratké) nebo **indiferentní** (volné).

Ve **stabilní** poloze (viz obr. 61) se těleso nachází v případě, že při jeho vychýlení se vrací do polohy původní. Pokud dojde k jeho naklonění (viz obr. 61 a) vrátí se těleso zpět působením vyvažujícího momentu $M_v = G \cdot x'$ (platí pouze pro $x' > 0$). Potenciální energie tělesa se změnou polohy zvětšuje.



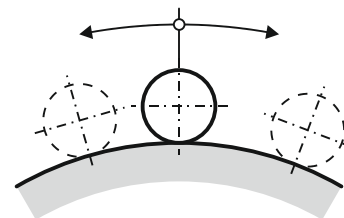
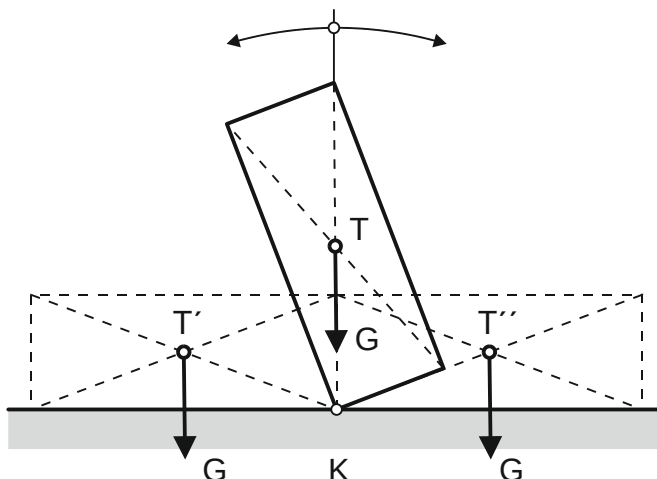
a) působení vyvažujícího momentu při naklonění tělesa



b) návrat tělesa do stabilní polohy

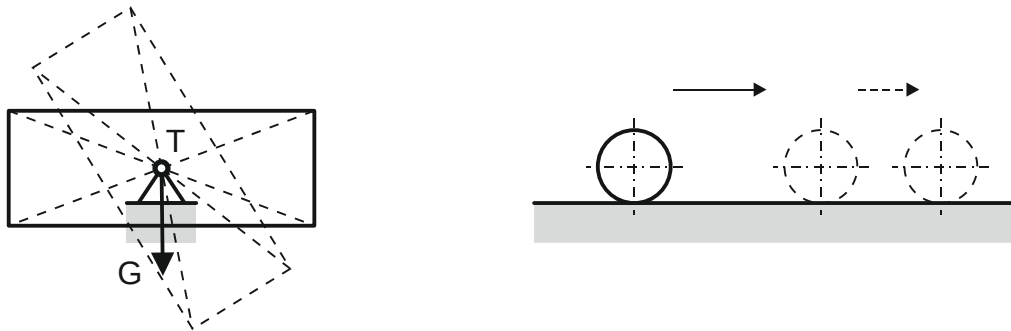
Obr. 61 Stabilní poloha tělesa.

V **labilní** poloze se těleso nachází v okamžiku, kdy se při jeho vychýlení nevrací do své původní polohy. Potenciální energie tělesa se změnou polohy zmenšuje.



Obr. 62 Labilní poloha tělesa.

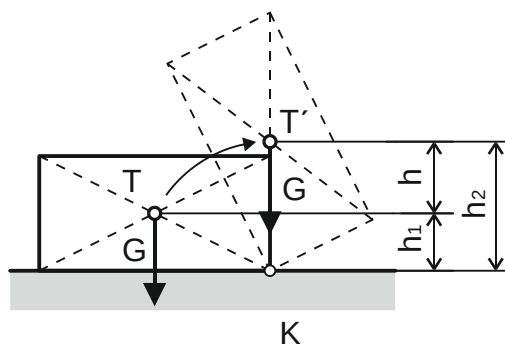
V **indiferentní** poloze se těleso nachází tehdy, když při jeho vychýlení nedochází ke změně velikosti výsledného momentu a výslednice sil působících na těleso. Potenciální energie tělesa zůstává v jakékoliv poloze konstantní.



Obr. 63 Indiferentní poloha tělesa.

Stabilita tělesa je míra schopnosti tělesa udržovat stabilní polohu. Míra stability je určena prací, kterou je nutno vykonat při přemístění tělesa z polohy stabilní do polohy labilní.

$$W = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \quad (69)$$



Obr. 64 Stabilita tělesa.

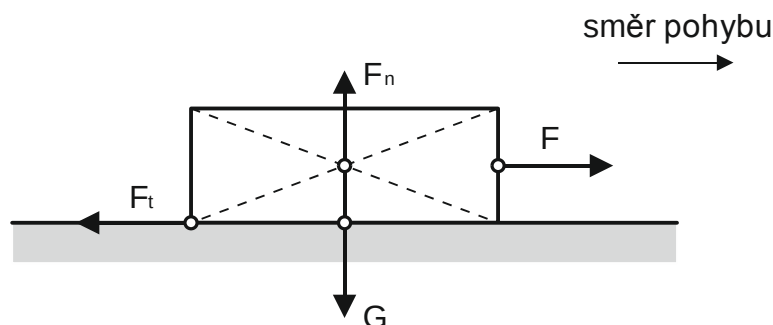
Stabilita tělesa je tím větší, čím větší je hmotnost tělesa, čím níže je těžiště ve stabilní poloze a čím větší je vzdálenost svislé těžnice od podstavné hrany (klopného bodu).

10. PASIVNÍ ODPORY

Pasivní odpory na tělesech způsobují vnější síly, jejichž smysl působení je vždy opačný oproti směru pohybu těles. Velikost těchto pasivních odporů závisí na zátěžných silách, dále na dokonalosti povrchu funkčních ploch těles, na jejich způsobu mazání a na vhodné volbě jejich materiálů.

10.1 Tření smykové

Velikost třecí síly u smykového tření závisí na normálové složce přítláčné síly F_n a součiniteli smykového tření μ .



- F tažná síla (N)
- F_n normálová složka přítláčné síly (N)
- G tíhová síla (N)
- F_t třecí síla (N)

Obr. 65 Sílové poměry u smykového tření.

Tažnou sílu F určíme pomocí podmínek rovnováhy.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F - F_t = 0 \Rightarrow F = F_t$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_n - G = 0 \Rightarrow F_n = G$$

dále platí přímá úměrnost mezi veličinami F , G , F_t a F_n a lze říci:

$$\frac{F}{G} = \frac{F_t}{F_n} = \mu \quad (70)$$

kde μ (-) je součinitel smykového tření, který vyjadřuje stav stykových ploch mezi tělesy (mazané, suché), dokonalost jejich opracování (drsnot povrchu) a druh použitých materiálů.

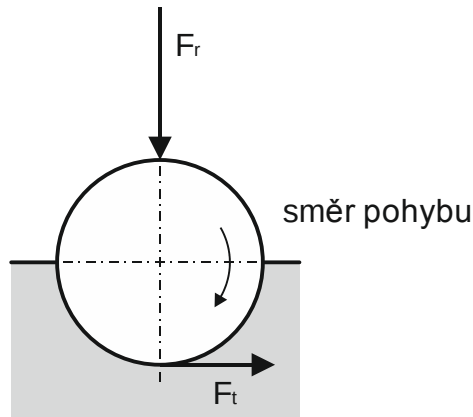
Tažná síla pak je dána vztahem:

$$F = F_t = F_n \cdot \mu = G \cdot \mu = m \cdot g \cdot \mu \quad (71)$$

Ze vztahu je zřejmé, že tažná (třecí) síla není vůbec závislá na rozměrech třecích ploch!

10.2 Tření čepové

Při otáčení čepu v ložisku (viz obr. 66) platí podobné podmínky jako u tření smykového.



F_r radiální zatížení čepu (N)
 F_t třecí síla (N)

Obr. 66 Silové poměry u čepového tření.

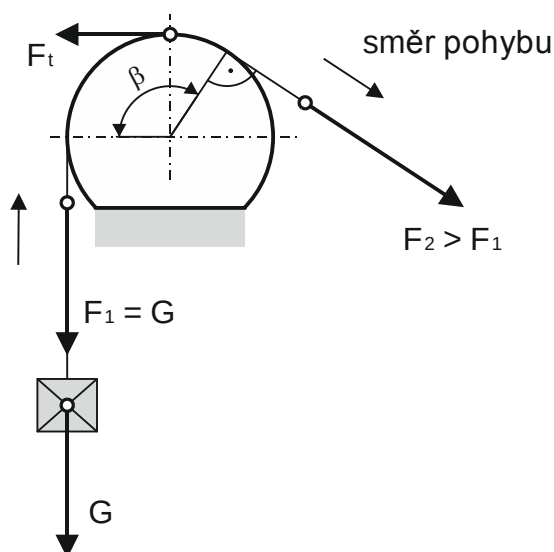
Velikost třecí síly je určena vztahem:

$$F_t = F_r \cdot \mu_{\text{č}} \quad (72)$$

kde $\mu_{\text{č}}$ (-) je součinitel čepového tření, který je větší než součinitel smykového tření μ (-). Pro nezaběhnuté plochy je $\mu_{\text{č}} = 1,5 \cdot \mu$ a pro zaběhnuté plochy je $\mu_{\text{č}} = 1,25 \cdot \mu$.

10.3 Tření vláknové

Smýká-li se lano po nehybné válcové ploše, vzniká třecí síla F_t , která je příčinou vláknového tření. Zvedáme-li tímto způsobem břemeno, je tažná síla F_2 větší než tíhová síla břemene G .



Obr. 67 Silové poměry u vláknového tření (případ zvedání břemene).

Velikost tažné síly F_2 je dána tzv. Eulerovým vztahem:

$$F_2 = F_1 \cdot e^{\beta \cdot \mu} = G \cdot e^{\beta \cdot \mu} \quad (73)$$

kde:

e je základ přirozeného logaritmu, jeho hodnota je 2,718 (-)

μ je součinitel smykového tření (-)

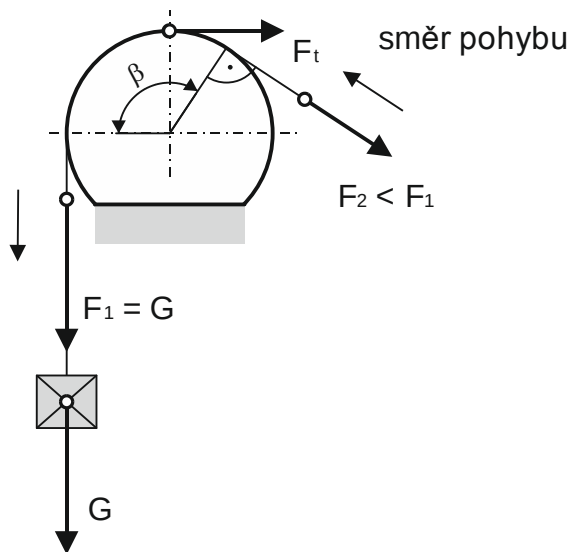
β je úhel opásání, hodnotu udáváme v radiánech! Platí tedy:

$$\beta = \frac{\pi \cdot \beta^\circ}{180^\circ}$$

Pro určení velikosti třecí síly F_t při zvedání břemene platí:

$$F_t = F_2 - F_1 = F_1 \cdot e^{\beta \cdot \mu} - F_1 = F_1 \cdot (e^{\beta \cdot \mu} - 1) = G \cdot (e^{\beta \cdot \mu} - 1) \quad (74)$$

Spouštíme-li tímto způsobem břemeno, je tažná síla F_2 menší než tíhová síla břemene G .



Obr. 68 Silové poměry u vláknového tření (případ spouštění břemene).

Velikost tažné síly F_2 je opět dána tzv. Eulerovým vztahem a lze říci:

$$F_1 = G = F_2 \cdot e^{\beta \cdot \mu} \quad (75)$$

z toho plyne

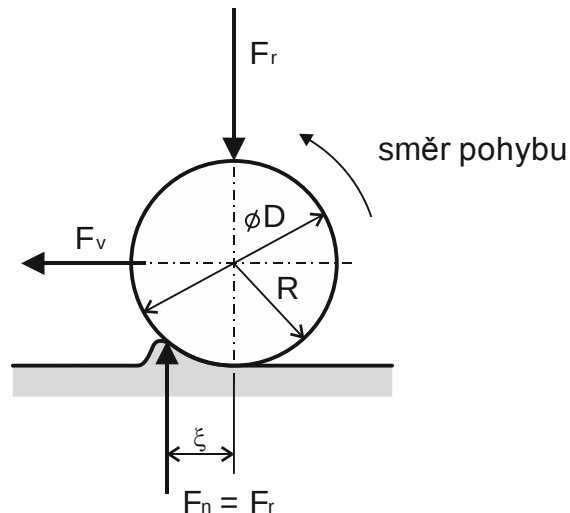
$$F_2 = \frac{F_1}{e^{\beta \cdot \mu}} = \frac{G}{e^{\beta \cdot \mu}} \quad (76)$$

Velikost třecí síly F_t při spouštění břemene je pak určena vztahem:

$$F_t = F_1 - F_2 = F_1 - \frac{F_1}{e^{\beta \cdot \mu}} = F_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\beta \cdot \mu}}\right) = G \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\beta \cdot \mu}}\right) \quad (77)$$

10.4 Valivý odpor

Valivý odpor vzniká při kotálení tělesa po podložce a to vlivem deformace tělesa případně i podložky.



F_r radiální zatížení kola (N)

F_n normálová síla (N)

F_v síla potřebná k překonání valivého odporu a udržení tělesa v rovnoměrném pohybu (N)

ξ rameno valivého odporu (mm), jeho velikost závisí na materiálu tělesa a podložky a na jejich povrchové úpravě

Obr. 69 Silové poměry u valivého odporu.

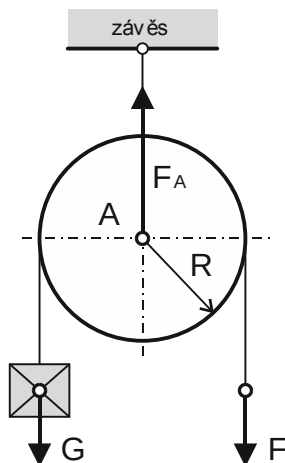
Vlivem těchto deformací je nutné při pohybu tělesa překonávat moment valivého odporu $M_v = F_r \cdot \xi$ momentem $F_v \cdot R$. Velikost síly F_v potřebné k udržení tělesa v rovnoměrném pohybu je tedy dána vztahem:

$$F_v = \frac{F_r \cdot \xi}{R} \quad (78)$$

11. SILOVÉ POMĚRY U JEDNODUCHÝCH MECHANIZMŮ

Mechanismy jsou soustavy těles spojené navzájem vazbami. Slouží k přenosu sil a transformaci pohybu. U následujících mechanismů zanedbáváme pro jejich velikost pasivní odpory.

11.1 Pevná kladka



Tažnou sílu F určíme s využitím podmínek rovnováhy.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_A - G - F = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$G \cdot R - F \cdot R = 0$$

z toho plyne:

$$F = G = m \cdot g \quad (79)$$

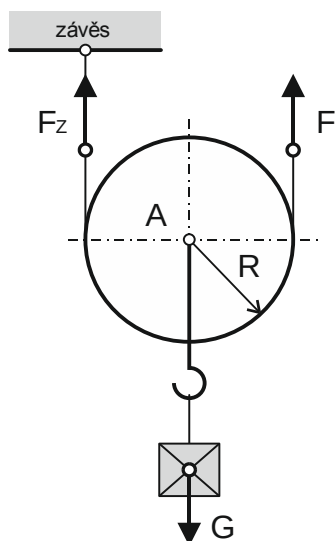
Tažná síla F se u pevné kladky rovná tíze břemene G .

Obr. 70 Silové poměry na pevné kladce.

Pro sílu F_A jež namáhá závěs kladky pak platí:

$$F_A = G + F = 2 \cdot G = 2 \cdot m \cdot g \quad (80)$$

11.2 Volná kladka



Tažnou sílu F určíme opět s využitím podmínek rovnováhy.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_Z + F - G = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F \cdot R - F_Z \cdot R = 0$$

dále platí:

$$F = F_Z$$

$$F + F - G = 0$$

Obr. 71 Silové poměry na volné kladce.

Z toho plyne:

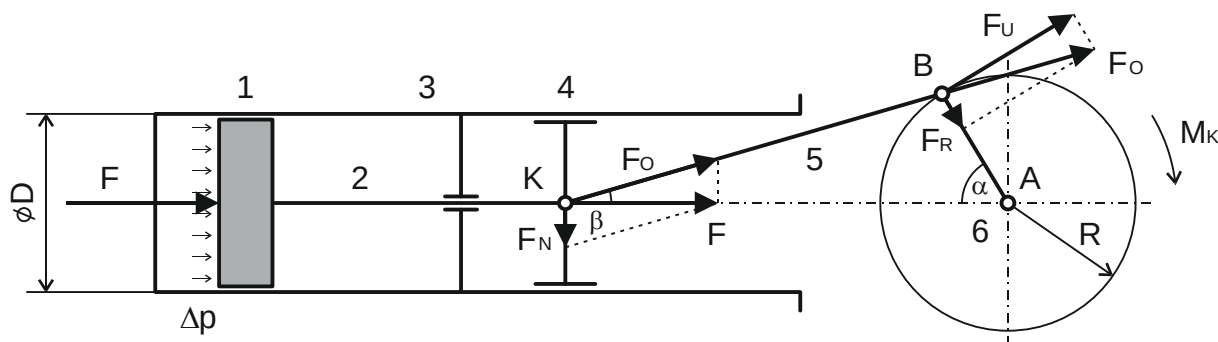
$$F = \frac{G}{2} = \frac{m \cdot g}{2} \quad (81)$$

Lze tedy říci, že tažná síla F je u volné kladky poloviční než u kladky pevné.

Pro sílu F_z jež namáhá závěs kladky pak platí:

$$F_z = F = \frac{G}{2} = \frac{m \cdot g}{2} \quad (82)$$

11.3 Klikový mechanismus úplný (křížákový)



- 1 – píst
- 2 – pístnice
- 3 – válec
- 4 – křížák
- 5 – ojnice
- 6 – kliková hřídel

Obr. 72 Silové poměry na úplném klikovém mechanismu.

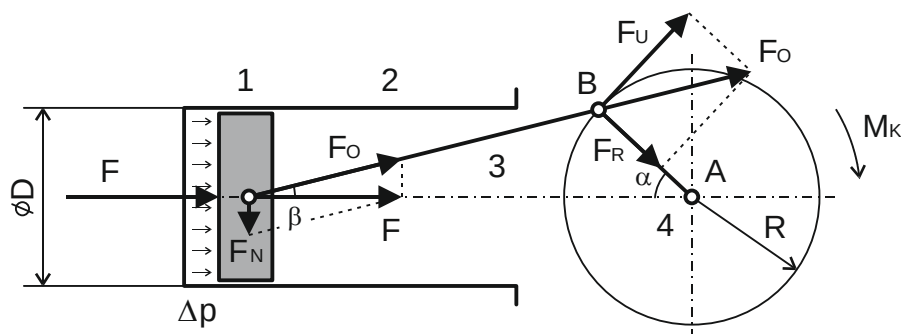
Uvažujeme-li přetlak v pracovním prostoru válce o velikosti Δp pak síla F působící na píst je dána vztahem:

$$F = S \cdot \Delta p = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta p \quad (83)$$

Tato síla je přenesena pístnicí do čepu křížáku, kde se rozkládá na dvě složky a to sílu F_O (sílu působící v ojnici mechanismu) a sílu F_N (sílu normálovou). Síla F_O je dále přenesena ojnicí do klikového čepu, kde se její účinek rozloží na složku obvodovou F_U a složku radiální F_R . Okamžitý kroutící moment na klikové hřídeli M_K pak bude roven:

$$M_K = F_U \cdot R \quad (84)$$

11.4 Klikový mechanismus zkrácený (bezkřížákový)



- 1 – píst
- 2 – válec
- 3 – ojnice
- 4 – kliková hřídel

Obr. 73 Silové poměry na zkráceném klikovém mechanismu.

Na zkráceném klikovém mechanismu jsou obdobné silové poměry jako na úplném klikovém mechanismu. Chybí zde pístnice a křížák, proto se síla F rozkládá přímo na pístním čepu na dvě složky a to sílu F_O (sílu působící v ojnici mechanismu) a sílu F_N (sílu normálovou). Síla F_O je opět dále přenesena ojnici do klikového čepu, kde se její účinek rozloží na složku obvodovou F_U a složku radiální F_R .

Při využití početního řešení silových poměrů klikového mechanismu (úplného i zkráceného) platí několik následujících vztahů:

$$F_O = \frac{F}{\cos \beta} \quad (85)$$

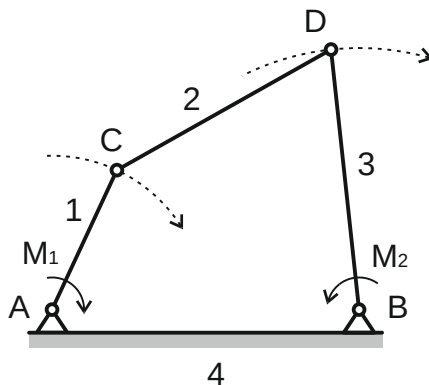
$$F_N = F \cdot \tan \beta \quad (86)$$

$$F_R = F_O \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad (87)$$

$$F_U = F_O \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (88)$$

11.5 Kloubový mechanismus

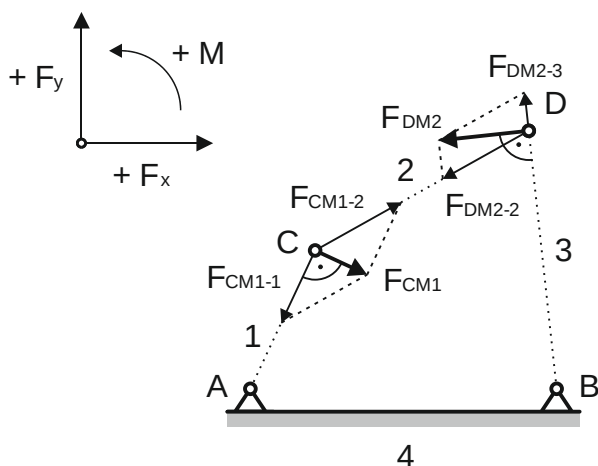
Na obr. 74 je znázorněn kloubový mechanismus, tzv. čtyřčlen, který se skládá z kliky, ojnice, vahadla a rámu. Předpokládáme, že klika 1 je hnací člen mechanismu a vahadlo 3 je hnáný člen mechanismu. Moment M_1 je tedy hnací moment a moment M_2 je moment hnáný (zátěžný) neboli pracovní.



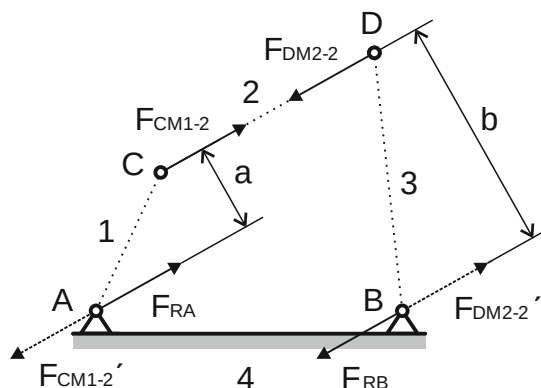
- 1 – klika (vahadlo)
- 2 – ojnice
- 3 – vahadlo
- 4 – rám

Obr. 74 Kloubový mechanismus (čtyřčlen).

Účinky momentů M_1 a M_2 nahradíme účinky sil F_{CM1} a F_{DM2} (viz obr. 75 a). Dále stanovíme složky těchto sil promítnuté do směrů os kliky, ojnice a vahadla. Pomocí přeložení účinků složek F_{CM1-2} a F_{DM2-2} (působících na ojnici) do podpor rámu A a B (viz obr. 75 b) jsme pak schopni určit závislost mezi poměrem velikostí momentů M_1 , M_2 a poměrem kolmých vzdáleností podpor od ojnice mechanismu.



a) nahrazení účinku momentů M_1 a M_2 účinky sil F_{CM1} a F_{DM2} .



b) přeložení účinků sil F_{CM1-2} a F_{DM2-2} působících na ojnici do podpor rámu A a B.

Obr. 75 Silové poměry na kloubovém mechanismu.

Pro kloubový mechanismus tedy platí:

$$M_1 = -F_{CM1-2} \cdot a$$

$$M_2 = F_{DM2-2} \cdot b$$

a jelikož velikosti sil F_{CM1-2} a F_{DM2-2} jsou stejné a mají pouze opačný smysl působení, lze dále určit:

$$\frac{|M_1|}{|M_2|} = \frac{F_{CM1-2} \cdot a}{F_{DM2-2} \cdot b} = \frac{a}{b} \quad (89)$$

pro $a > b$ bude $M_1 > M_2$

$a < b$ bude $M_1 < M_2$

Dle pravidel přeložení účinku síly do jiného působíště je možné dále konstatovat, že:

$$F_{CM1-2} = F_{RA}$$

$$F_{DM2-2} = F_{RB}$$

Použitá literatura:

- [1] HOFÍREK, Mojmír. *Mechanika - statika*. 1. vyd., Praha: Fragment, 1998.
- [2] SALABA, Stanislav a Antonín MATĚNA. *Mechanika I - statika*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978.
- [3] TUREK, Ivan, Oldřich SKÁLA a Jozef HALUŠKA. *Mechanika - sbírka úloh*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1982.
- [4] MIČKAL, Karel. *Sbírka úloh z technické mechaniky*. 5. vyd. Praha: Informatorium, spol. s r. o., 1998.

12. Závěr

Předložený výukový materiál si klade za cíl poskytnout informace z vybraných kapitol mechaniky – statiky. Obsahuje jak teorii, tak vybrané příklady a obecné postupy pro řešení úloh. Může sloužit jako samostatný výukový a studijní materiál či jako podpůrný prostředek pro lepší pochopení vybraných kapitol statiky. Po jejich zvládnutí je možné dosáhnout optimálních výsledků při navrhování strojů či zařízení a tak zajistit ekonomicky a energeticky nenáročné řešení realizace navržených konstrukčních celků.